



Universidad Carlos III de Madrid.

Departamento de medios continuos y teoría de estructuras.

Grado en Ingeniería Mecánica.

TRABAJO FIN DE GRADO.

MODELIZACIÓN ANALÍTICA DEL IMPACTO DE PROYECTILES RÍGIDOS SOBRE PLACAS DE ALEACIONES DE ALUMINIO.

Alumno: Alberto Mata Díaz.

Tutor: Jorge López Puente.

Septiembre 2012

Índice.

Resumen.	6
Capítulo 1. Introducción.	7
1.1 Fenómenos de impacto.	8
1.2 Interés de las aleaciones de aluminio.	12
1.3 Diseño de los sistemas de protección frente a impactos.	15
1.4 Objetivos.	16
1.5 Descripción del trabajo.	17
Capítulo 2. Estado del arte. Antecedentes.	18
2.1 El impacto balístico.	19
2.2 Modelos analíticos previos.	28
2.2.1 Desarrollo de los modelos sobre el comportamiento de los materiales compuestos frente a impactos.	28
2.2.2 Desarrollo de los modelos sobre el comportamiento de los materiales metálicos frente a impactos.	30
Capítulo 3. Descripción del modelo analítico calculado.	33
3.1 Introducción y desarrollo del modelo.	34
3.2 Ecuación del perfil del proyectil en cada tramo de penetración.	34
3.3 Parámetros adimensionales y fuerza resistente a la penetración para cada parte de la misma.	37
3.4 Solución del modelo para obtener la velocidad en función de la profundidad penetrada.	38
Capítulo 4. Resultados. Comparación entre diferentes tipos de aluminio.	45
4.1 Modelo calculado con método de Euler. Comparación de resultados.	46
4.2 Aleación de aluminio 6061-T651.	51
4.3 Aleación de aluminio 7075-T651.	59
4.4 Aleación de aluminio 5083-H116.	64
Capítulo 5. Conclusiones y trabajos futuros.	68
5.1 Conclusiones.	69
5.2 Trabajos futuros.	70
Capítulo 6. Referencias.	71
6.1 Referencias.	72

Anexo A. Programa del modelo analítico y del modelo numérico en Matlab.	74
A.1 Código del programa.....	75

Índice de figuras.

Figura 2.1: Modelo del péndulo balístico.....	19
Figura 2.2: Ángulo de impacto.....	21
Figura 2.3: Fenómenos locales de rotura.....	24
Figura 2.4: Fenómeno de penetración.....	24
Figura 2.5: Probabilidad de perforación frente a velocidad de impacto.....	27
Figura 2.6: Grado de penetración o DOP.....	27
Figura 3.1: Parte 1 del impacto.....	35
Figura 3.2: Parte 2 del impacto.....	35
Figura 3.3: Parte 3 del impacto.....	36
Figura 3.4: Parte 4 del impacto.....	36
Figura 3.5: Impacto a 190 m/s con el modelo analítico.....	43
Figura 4.1: Predicción de un nuevo valor.....	46
Figura 4.2: Impacto a 190 m/s con el método de Euler.....	48
Figura 4.3: Impacto a 190 m/s. Comparación entre modelos.....	49
Figura 4.4: Impacto a 600 m/s. Comparación entre modelos.....	49
Figura 4.5: Velocidad residual vs inicial con el modelo analítico completo Al 6061-T651.....	53
Figura 4.6: Velocidad residual vs inicial despejando del orden cero del modelo analítico Al 6061-T651.....	54
Figura 4.7: Velocidad residual vs inicial para espesor 10 mm Al 6061-T651.....	54
Figura 4.8: Velocidad residual vs inicial para espesor 12 mm Al 6061-T651.....	55
Figura 4.9: Velocidad residual vs inicial para espesor 16 mm Al 6061-T651.....	55
Figura 4.10: Velocidad residual vs inicial para espesor 20 mm Al 6061-T651.....	56
Figura 4.11: Velocidad residual vs inicial para espesor 25 mm Al 6061-T651.....	56
Figura 4.12: Velocidad residual vs inicial para espesor 30 mm Al 6061-T651.....	57
Figura 4.13: Límites balísticos para Al 6061-T651.....	58
Figura 4.14: Límite balístico en función del espesor Al 6061-T651.....	58
Figura 4.15: Velocidad residual vs inicial con el modelo analítico completo Al 7075-T651.....	59
Figura 4.16: Velocidad residual vs inicial despejando del orden cero del modelo analítico Al 7075-T651.....	60
Figura 4.17: Velocidad residual vs inicial para espesor 10 mm Al 7075-T651.....	61
Figura 4.18: Velocidad residual vs inicial para espesor 12 mm Al 7075-T651.....	61
Figura 4.19: Velocidad residual vs inicial para espesor 16 mm Al 7075-T651.....	61

Figura 4.20: Velocidad residual vs inicial para espesor 20 mm Al 7075-T651.....	62
Figura 4.21: Velocidad residual vs inicial para espesor 25 mm Al 7075-T651.....	62
Figura 4.22: Velocidad residual vs inicial para espesor 30 mm Al 7075-T651.....	62
Figura 4.23: Límites balísticos para Al 7075-T651.	63
Figura 4.24: Límite balístico en función del espesor Al 7075-T651.	63
Figura 4.25: Velocidad residual vs velocidad inicial experimental Al 5083-H116.....	64
Figura 4.26: Velocidad residual vs inicial con el modelo analítico Al 5083-H116.....	65
Figura 4.27: Velocidad residual vs inicial espesor 20 mm Al 5083-H116.....	66
Figura 4.28: Velocidad residual vs inicial espesor 25 mm Al 5083-H116.....	66
Figura 4.29: Velocidad residual vs inicial espesor 30 mm Al 5083-H116.....	67

Resumen.

Con este proyecto, se ha calculado un modelo analítico válido para el estudio de impactos de proyectiles rígidos sobre placas de aleaciones de aluminio de igual o menor espesor que la longitud de la cabeza del proyectil empleado en los impactos.

El cálculo de este modelo se ha estructurado en primer lugar calculando la resistencia a la penetración de la cabeza del proyectil basándose en la teoría de la dinámica de expansión de la cavidad, obteniéndose conforme [1] y [2]. Una vez calculada esta resistencia, se procedió a aplicar un balance de energía, para obtener el valor de la velocidad en función de la profundidad que haya alcanzado el impacto sobre la placa.

Además de obtener la velocidad en cualquier punto de la profundidad alcanzada, también se ha utilizado una parte del modelo para el cálculo del límite balístico a partir de una fórmula directa y después se ha comparado con los valores obtenidos con el modelo completo. También se ha empleado el método de Euler para resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen, que para el caso del modelo analítico se aplicó el método de perturbaciones regulares. Después se compararon los resultados procedentes de ambas formas de cálculo.

Igualmente se ha analizado la influencia de cada uno de los parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo, cuya variación produce efectos importantes en la profundidad de penetración del proyectil.

Por último, se han comparado los resultados obtenidos para diferentes materiales para observar las diferencias en la profundidad alcanzada en el impacto sobre la placa.

Capítulo 1.

Introducción.

1.1. FENÓMENOS DE IMPACTO.

Los fenómenos de impacto constituyen solicitaciones dinámicas de interés especial, ya que aunque son menos probables que otros tipos de acciones, sus efectos son catastróficos. El análisis de estos fenómenos exige frecuentemente procedimientos de cálculo diferentes a los de otros tipos de solicitaciones dinámicas más comunes en la dinámica estructural. Salvo para impactos a muy baja velocidad, es muy frecuente toparse con un comportamiento no lineal de la estructura, con grandes desplazamientos y deformaciones, respuesta no lineal del material con probable rotura local y efectos de interacción complejos en los contactos. A medida que la velocidad del impacto aumenta, adquieren mayor importancia los fenómenos de transmisión de ondas de tensión o incluso de ondas de choque. Salvo para problemas triviales, el cálculo analítico es muy complicado y suele ser necesario emplear métodos numéricos basados en la discretización del espacio y el tiempo. La parte espacial se resuelve normalmente mediante mallas de elementos finitos. Las mallas preferidas son las Lagrangianas, ligadas al material, por su mejor capacidad para resolver los fenómenos de contorno como los contactos. El resultado de la aplicación de la discretización espacial da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que debe resolverse numéricamente mediante integración directa en el tiempo, ya sea empleando procedimientos implícitos o explícitos. También citar los nuevos procedimientos conservativos energía-momento que en ocasiones pueden aportar ventajas importantes.

Los impactos sobre las estructuras son solicitaciones dinámicas de poca duración y de elevada intensidad que pueden producir importantes daños sobre las mismas, o alteraciones notables en su estabilidad o movimiento.

Dentro de los procedimientos clásicos de la mecánica de sistemas rígidos, el impacto es estudiado mediante la teoría de impulsiones, por lo que la duración de los impactos se considera instantánea. En esta teoría se aplica la conservación de cantidad de movimiento y momento cinético, teniendo en cuenta el balance de energía mediante el llamado “coeficiente de restitución”. Otra simplificación bastante empleada es la de la simultaneidad de las impulsiones, debido a que normalmente una impulsión activa da lugar a otras reactivas.

En resumen, la teoría de impulsiones permite el cálculo de un estado del movimiento después de la impulsión que deberá ser considerado como nuevas condiciones iniciales para la dinámica del sistema a partir de ese momento. En algunos casos los fenómenos de impacto sobre estructuras pueden ser estudiados con este tipo de teorías. Un ejemplo de esta situación es el de un impacto de corta duración en el que la pérdida de energía sea pequeña y pueda considerarse un impacto elástico (coeficiente de restitución $e=1$), o un

fenómeno en el que aunque exista pérdida de energía se conozca perfectamente dicho coeficiente ($0 < e < 1$). En [3] puede leerse una descripción de dichos procedimientos y su aplicación práctica en diversos casos.

En realidad, en la mayoría de los casos reales es necesario un estudio más detallado, profundizando en aquello que la teoría de impulsiones no trata: cómo se produce la pérdida de energía, de qué manera se desarrolla la fuerza de impacto a través del contacto entre los cuerpos, así como la posible degradación y rotura de dichos cuerpos debido a las elevadas sollicitaciones. Normalmente es necesario recurrir a métodos numéricos que incluyan una resolución adecuada de las ecuaciones dinámicas en el tiempo.

Tampoco se deben olvidar los principios básicos de la dinámica, que en bastantes ocasiones es necesario aplicar para deducir algunas condiciones que no son inmediatas en el planteamiento del problema. Un ejemplo es el cálculo de las fuerzas de impacto, a imponer en el modelo estructural, en situaciones en que no sea práctico realizar una modelización detallada del fenómeno local en la zona de impacto. Esta modelización local detallada necesitaría un preciso modelo de los contactos entre los cuerpos que impactan, de la consideración de la propagación de ondas en la zona de impacto y de la rotura del material que conduzca a una penetración del proyectil más o menos profunda. Estos fenómenos son muy difíciles para representar, lo que obliga a veces a realizar hipótesis simplificadoras sustentadas en los principios básicos de la mecánica.

Las situaciones en las que se podría originar un impacto y en las cuales es necesario su estudio son muy diversas, lo que hace difícil abarcar todas las posibles. A continuación se explican algunos casos relevantes:

➤ Impactos sobre instalaciones y edificios.

Aquellas instalaciones que tengan una peligrosidad importante suelen exigir la consideración de las hipótesis de impacto. Se pueden citar los depósitos de gas natural licuado (GNL) o gases licuados del petróleo (GLP), y especialmente los reactores nucleares [4].

Los impactos de origen externo más tenidos en cuenta comúnmente son:

- Proyectiles generados por el viento (postes de electricidad, de teléfono, etc.).
- Misiles creados por fallo de otras instalaciones (turbinas, recipientes a presión, etc.).
- Aviones militares y civiles.
- Proyectiles impulsados por explosiones externas.

Pero, posiblemente, el edificio de contención nuclear es una de las instalaciones que requiere mayor nivel de seguridad frente a impacto. Los impactos en su interior tales como el impacto de tuberías, de barras de control, de bombas...etc., aquellos relacionados con sismos, cualquier rotura de algún elemento y explosiones de cualquier tipo, son las fuentes de impacto principales en este tipo de edificios.

➤ Explosiones e impactos balísticos.

En este caso, se trata de impactos por lo general deliberados. Sin embargo, su modelización es similar a la de algunos impactos accidentales que surgen de explosiones muy energéticas. Su estudio puede realizarse desde dos puntos de vista: desde el ataque, cuyo objetivo es conseguir la máxima penetración o daño, o desde la defensa, donde el objetivo es conseguir la protección adecuada.

Respecto a los impactos balísticos, se pueden nombrar los tipos de proyectiles más relevantes:

- Balas clásicas, con o sin punta y normalmente de materiales densos como el plomo, cuyas velocidades de impacto suelen estar entre 500-1500 m/s.
- Proyectiles de fragmentación, que proceden de una detonación y poseen formas arbitrarias, y que alcanzan velocidades entre 500-2000 m/s.
- Proyectiles huecos, que convierten los forros de metal en chorros de metal a velocidades muy altas, de entre 3000-10000 m/s.
- Proyectiles auto forjados por la acción de explosivos, con velocidades de entre 1500-3000 m/s.

En el caso de las explosiones, se pueden emplear tanto para propulsar proyectiles como para crear cargas cerca de los blancos. Se suelen dividir en dos tipos:

- Detonantes, como el TNT o la dinamita, que explotan cuando el hidrógeno y el carbono reaccionan con los radicales de nitrógeno y oxígeno de la misma molécula. Una ventaja de este tipo es que no necesitan estar confinados para producir presiones altas.
- Pólvoras, que se queman al arder el carbono y el azufre con el oxígeno contenido en los nitratos. Necesitan estar confinadas para producir altas presiones.

➤ Impactos en vehículos de transporte.

El transporte, en cualquiera de sus tipos, presenta siempre el riesgo de colisión, y cada vez se da más importancia en el diseño a la seguridad frente a impactos, siendo este aspecto una de las claves del éxito comercial de algunos automóviles. Comenzando por las velocidades más bajas, se pueden citar los impactos de barcos, ya sea entre dos barcos o contra estructuras portuarias. Aunque la velocidad de los impactos es más baja que en otros casos, la gran cantidad de masa que se puede ver involucrada hace que la energía a absorber para reducir el impacto o para protegerse del mismo sea de una magnitud muy alta y difícil de alcanzar.

En lo que respecta a los automóviles, de sobra son conocidos los modelos y ensayos realizados por todos los fabricantes para garantizar la seguridad de los ocupantes frente a impactos frontales o laterales, como los test Euroncap, e incluso para garantizar la seguridad de los peatones, como en el caso de los modelos más modernos del fabricante Volvo. El diseño tiende a proveer una zona del vehículo que al colapsar produzca de forma controlada una disipación suficiente de energía, así como una zona de seguridad suficientemente rígida de manera que los ocupantes no sufran daño. En la fórmula 1 las dimensiones de esta zona rígida y sus características son esenciales para el diseño de los monoplazas.

En cuanto a los impactos ferroviarios, aunque son minoritarios producen efectos devastadores. En este caso, es necesario considerar de forma especial, además del efecto sobre el vehículo, el impacto sobre las estructuras ferroviarias y sobre aquellas estructuras circundantes. En el caso de la alta velocidad ferroviaria son aún más necesarias estas consideraciones.

Por último, en el ámbito de la aeronáutica, parece difícilmente alcanzable un diseño a prueba de impactos debido a la gran velocidad alcanzada y a la ligereza de los aparatos. En cambio, en combinación con otros dispositivos de seguridad un diseño adecuado frente a impacto resulta muy beneficioso. Uno de los fenómenos típicos a considerar es el del impacto de pájaros, algo bastante frecuente, sobre todo en zonas cercanas a los aeropuertos. Tanto el borde de ataque de las alas como la cabina de los pilotos son diseñados para resistir adecuadamente el impacto de un ave mediante experimentos y cálculos. En el caso del diseño de los motores, uno de los requisitos de obligada consideración es la ingestión de aves. Dentro de este campo, cabe destacar el estudio del cálculo de ciertas estructuras frente a la hipótesis de impacto de un avión, presente en la normativa de diseño nuclear de ciertos países. Para finalizar, se debe citar el impacto de meteoritos o de basura espacial sobre naves espaciales. Esta es una de las principales preocupaciones actuales para los vehículos aeroespaciales, debido a los efectos catastróficos que causarían dichos proyectiles.

1.2. INTERÉS DE LAS ALEACIONES DE ALUMINIO.

El interés en el uso de las aleaciones de aluminio para ligeras estructuras de protección hoy en día está en auge. Sin embargo, el número de investigaciones experimentales y computacionales ofreciendo información detallada es aún limitado.

Estas aleaciones son de especial interés en el diseño de estructuras de fortificación ligeras para la protección frente a cargas accidentales, ataques terroristas y en las misiones internacionales de paz. Las razones de escoger este material son su baja densidad, su alta dureza, su gran capacidad de absorción de energía, su buena resistencia a la corrosión y, por último, su buena conductividad térmica. Otra ventaja es que la mayoría de las aleaciones de aluminio pueden ser extruidas para conseguir estructuras muy complejas que pueden ser utilizadas directamente para sistemas de protección integrados avanzados.

Pero el interés sobre las aleaciones de aluminio no es nuevo. Ya en 1895 Yarrow & Co construyó un buque lanza torpedos con superestructura de aluminio. En el buque de ensayo, todos los fragmentos fueron aproximadamente un 25% más grandes que si hubiesen sido de acero, y además pesaban exactamente la mitad como mucho [5]. Además, se logró un aumento de 3,5 nudos de velocidad sobre buques hechos de acero. Más recientemente, algunos estudios se han llevado a cabo para conocer la resistencia a la penetración balística de diferentes aleaciones de aluminio. Algunos de estos métodos se han mencionado en los estudios de Backman and Goldsmith [6] y Crobett et al. [7]. Gracias a estos estudios y otros similares, se ha llegado a observar que el aluminio también presenta desventajas frente al acero cuando es sometido a un impacto estructural. Tiene menor módulo de Young, menor resistencia y menor ductilidad que los aceros de alta resistencia, y se funde a temperaturas entre 600-700°C. También es menos sensible a la velocidad de deformación que muchos aceros con respecto a su resistencia, pero la velocidad de deformación puede tener un efecto significativo en la ductilidad. Se ha comprobado que la velocidad de deformación disminuye conforme aumenta la resistencia del material (Zukas et al. [8]). En algunas aleaciones, la sensibilidad a la velocidad de deformación llega incluso a ser negativa. La mayoría de las aleaciones de aluminio también son conocidas por ser anisotrópicas, que significa que las propiedades del material varían según la dirección, es decir, poseen dependencia direccional. Esto conduce a una complejidad adicional a la hora de modelar el comportamiento de las aleaciones de aluminio analíticamente y con elementos finitos.

Desde que se observó que las placas delgadas de aluminio parecían tener rendimientos balísticos pobres, aparecen con frecuencia en estructuras multi-capa o espaciadas, en productos extruidos o en combinación con otros

materiales. La posibilidad de mejorar la resistencia a la penetración de una placa introduciendo capas de otros materiales se conoce desde hace mucho tiempo. Se ha demostrado, por ejemplo, que una superficie dura de material (por ejemplo cerámico) para resistir la indentación respaldada por una dura y dúctil capa interior para absorber la energía cinética del proyectil es una efectiva combinación para resistir la perforación de proyectiles (Johnson [9]), y de hecho se ha utilizado para el diseño de chalecos antibalas. La tendencia parece ser que cuando el peso del chaleco se reduce por debajo de un cierto valor, se deben integrar nuevos y avanzados materiales en el diseño. El aluminio es usado con frecuencia como capa protectora y como capa interior en este tipo de estructuras. La posibilidad de usar escudos fabricados por una gran cantidad de delgadas capas de aluminio también ha sido investigada como puede verse en [10-14]. Sin embargo, se ha visto que los datos sobre el impacto en estructuras multicapas son limitados y que el beneficio de cambiar placas monolíticas de aluminio por otras multi-capa no está claro.

En cualquier caso, la resistencia a la perforación balística de blancos monolíticos ha recibido la mayor parte de atención. Goldsmith y Finnegan [15] realizaron una serie de tests en los cuales placas de aluminio AA2024-0 y placas de acero dulce eran golpeadas por esferas de acero duro, con unas velocidades de entre 150 y 2700 m/s. Se encontró que la caída de velocidad experimentada por el proyectil disminuye desde el límite balístico a un valor mínimo y luego aumenta monótonamente con la velocidad inicial en todos los casos. También se observó que la cantidad de deformación global del blanco es máxima en el límite balística y decrece conforme la velocidad de impacto aumenta. Levy y Goldsmith [16] estudiaron en detalle la evolución de la deformación de placas delgadas de espesor 1,27 mm de aluminio AA2024-0 impactadas por un proyectil de 12,7 mm de diámetro con cabeza hemisférica aumentando cada vez la velocidad de impacto. Gupta et al. [17] investigó el comportamiento de placas de aluminio puro con espesores desde 0,5 a 2 mm impactadas por proyectiles de cabeza ojival y de acero. Todos ellos encontraron que simples modelos analíticos y empíricos daban resultados bastantes parecidos a los experimentales. Landkof y Goldsmith [18] llevaron a cabo una investigación sobre la perforación de delgadas placas de aluminio AA2024-0 impactadas por proyectiles de acero cilindro-cónicos causando fallo por el fenómeno petalling. Más tarde, Wierzbicki [19] propuso un modelo analítico que ofrecía buenas descripciones cualitativas y cuantitativas del daño de placas por el fenómeno petalling de los experimentos descritos por Landkof y Goldsmith.

También se han llevado a cabo estudios en los que el espesor de la placa es aproximadamente igual o superior al diámetro del proyectil. Piekutowski et al. [20] realizó perforaciones con placas de aluminio 6061-T651 de 26,3 mm de espesor y con proyectiles ojivales de acero de 12,9 mm de

diámetro y 88,9 mm de longitud, estudiando tanto impactos normales como oblicuos. También se propuso un modelo analítico de la perforación que predecía con precisión el límite balístico y las velocidades residuales para los datos presentados. Forrestal et al. [21] y Rosenberg y Forrestal [22] mostraron datos experimentales de placas de aluminio AA6061-T4 de 25,4 mm de espesor perforadas por proyectiles de acero T-200 de 9,53 mm de diámetro y 0,078 kg de masa o de acero T-200/C-300 de 7,1 mm de diámetro y 0,025 kg de masa, ambos de cabeza cónica. Los resultados experimentales obtenidos fueron comparados con cálculos realizados con un modelo ingenieril y se obtuvo una muy buena coincidencia de resultados. Forrestal et al. [23] también realizó varios experimentos que comparó con modelos analíticos basados en la teoría de la expansión de la cavidad, obteniendo por lo general resultados parecidos.

Este trabajo se encuentra dentro de este último tipo de estudio, ya que el modelo analítico calculado se basa en parte en la teoría de la expansión de la cavidad y asimismo el espesor de las placas es igual o superior al diámetro del proyectil.

1.3. DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE PROTECCIÓN FRENTE A IMPACTOS.

Como se ha podido leer en los apartados anteriores, los intentos de describir los procesos ocurridos durante y después del fenómeno de impacto han seguido diferentes cauces, que son los siguientes:

➤ Modelos empíricos o cuasi-analíticos.

En esta clase de modelos se desarrollan ecuaciones algebraicas utilizando correlaciones de grandes cantidades de datos experimentales y con ellas se realizan predicciones. Debido a esto último, estos modelos no proporcionan ningún avance para entender el proceso físico, sólo pueden usarse para un reducido número de experimentos similares y nunca pueden utilizarse en otras situaciones. Sin embargo, cabe mencionar que son útiles para intercambiar información entre investigadores.

➤ Métodos numéricos.

Estos métodos son utilizados para resolver todas las ecuaciones al completo, y obviamente no dan una solución exacta, pero actualmente el error producido depende de lo exactas que estén calculadas las propiedades de los materiales en cada situación. En este caso, se avanza en la comprensión del proceso físico y se mejora en la exactitud de los resultados respecto a los modelos anteriores.

➤ Modelos analíticos.

Aquí nos encontramos con este proyecto. Este tipo de modelos se basan en asumir ciertas simplificaciones que hacen que se pueda abordar matemáticamente el problema planteado. Normalmente, suelen centrarse en uno de los aspectos del proceso físico en concreto y se realizan simplificaciones. En el presente trabajo, por ejemplo, se trata al proyectil como un sólido rígido indeformable. No obstante, a veces también es necesario incluir en algunos casos datos empíricos o propiedades de materiales que son difíciles de conseguir. Para saber la exactitud de la solución de este tipo de modelos, normalmente se ha de recurrir a estudios experimentales y contrastar el error existente entre ambos tipos de estudios.

1.4. OBJETIVOS.

En el presente trabajo puede distinguirse un claro objetivo. Se pretende realizar un modelo analítico para el estudio del impacto de un proyectil rígido e indeformable, y de cualquier geometría (aunque sólo se realice para un tipo), sobre placas de aluminio puro o aleaciones. Este modelo analítico se realiza teniendo como base el modelo realizado por Q.M. Li, H.J. Weng y X.W. Chen para la hora de expresar la fuerza resistente a la penetración del proyectil.

En primer lugar, se comienza por obtener la ecuación del perfil del proyectil, que varía según su geometría, y según la cantidad de proyectil que ha penetrado en la placa. En este trabajo se utiliza un proyectil con geometría cónica.

En segundo lugar, se calcula la expresión de la fuerza resistente del proyectil, hallando previamente las constantes que forman parte de ella y que son función del perfil calculado en primer lugar. Se debe mencionar aquí que la fricción será ignorada en los cálculos de este punto.

En tercer lugar, partiendo de la fuerza resistente, se despejará la velocidad del proyectil en función de la profundidad alcanzada conociendo así la velocidad residual, en caso de que atravesase totalmente la placa, del proyectil.

Para el cálculo de la velocidad a lo largo de la penetración se recurre al programa informático Matlab, en el que se introducirán las ecuaciones y mediante el cual se irán cambiando parámetros como la velocidad inicial, el espesor de la placa, la longitud de la cabeza del proyectil, propiedades materiales, el peso del proyectil...,etc.

Por último, se graficará la velocidad en función de la profundidad y la velocidad residual en función de: la velocidad inicial, del espesor de placa, del peso del proyectil, de la longitud de la cabeza del proyectil, es decir, en función de los parámetros que forman parte de la ecuación que gobierna, modificándolos también para ver su influencia en la profundidad alcanzada por el proyectil y en la velocidad residual del mismo.

1.5. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el trabajo se ha llevado a cabo para conseguir realizar un modelo analítico de la penetración de un proyectil de geometría cualquiera sobre placas de aleaciones de aluminio.

El proyecto se divide en cinco capítulos:

El primero es el que nos ocupa, y en él se describen los fenómenos de impacto, el creciente interés sobre las aleaciones de aluminio, cómo abordar el diseño de sistemas de protección frente a impacto y los objetivos del proyecto.

En el segundo capítulo se abordan la historia del impacto balístico y su estudio y caracterización, y la descripción de modelos analíticos existentes sobre impactos balísticos, primero sobre CFRPs y, después, sobre metales y aleaciones de aluminio en concreto.

En el tercer capítulo se describe el modelo analítico obtenido, desde el cálculo de la fuerza resistente del proyectil hasta el despeje de la velocidad del proyectil en función de la profundidad alcanzada, pasando por el cálculo de las constantes necesarias, por la adimensionalización de las ecuaciones y por su representación gracias al programa informático Matlab.

En el cuarto y penúltimo capítulo, se comienza con la utilización del método de Euler para resolver las ecuaciones diferenciales del problema planteado, y se comparan los resultados obtenidos (gráficas y velocidades residuales) con los calculados con el modelo analítico descrito en el apartado anterior. Además, se estudian tres tipos de aleaciones de aluminio, 6061-T651, 7075-T651 y 5083-H116. Para cada aleación se aplica el modelo analítico y se obtienen gráficas sobre las velocidades residuales, el límite balístico y comparaciones entre cálculos realizados con el modelo completo y aquellos obtenidos sólo con la parte más influyente en el modelo, el orden cero. Para la última aleación existen resultados experimentales, por lo que se han comparado los mismos con los obtenidos con el modelo analítico obtenido.

En el último capítulo, el quinto, se exponen las conclusiones sacadas del trabajo y los trabajos futuros a realizar.

Capítulo 2.

Estado del arte. Antecedentes.

2.1. EL IMPACTO BALÍSTICO.

➤ El péndulo balístico.

Mirando hacia atrás en la historia, es innegable que en los inicios de la balística el péndulo balístico abrió una puerta y sentó un precedente en torno a los estudios de impacto balístico como el primer modelo experimental de cálculo de velocidad de impacto de un proyectil. Debido a esto, se describe a continuación este experimento acompañado de un desarrollo analítico basado en la mecánica clásica.

- Introducción.

El péndulo balístico fue el primer instrumento científico usado para medir la velocidad de impacto de un proyectil. Fue inventado por el matemático inglés Benjamin Robins. Una vez publicado en 1742 se inicia un verdadero y rápido desarrollo de balística. El péndulo balístico fue desde entonces una herramienta indispensable hasta que en las primeras décadas del siglo XX fue lenta y paulatinamente desplazado, debido a que el desarrollo de la electrónica dio paso a una nueva generación de instrumentos capaces de medir la velocidad de los proyectiles de forma más precisa, directa y sencilla.

El péndulo balístico consiste básicamente en la suspensión de un objeto de cierta masa, tamaño y material mediante un hilo de un material no extensible, tal y como se muestra en la figura 2.1.

Tanto el volumen, la masa y el material de composición del objeto, al que se denominará objetivo, deben ser seleccionados de acuerdo con las características de velocidad y masa del proyectil que lo impacte.

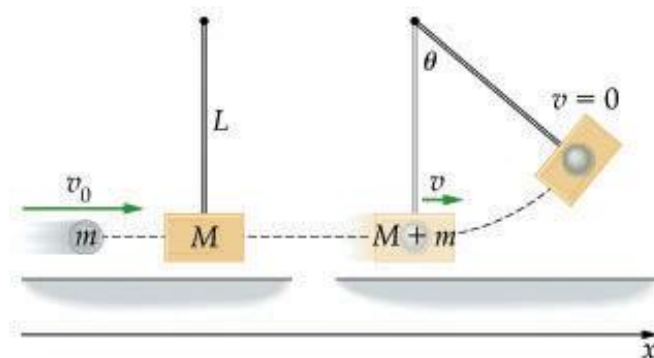


Figura 2. 1 - Modelo del péndulo balístico.

El material del objetivo puede ser madera, arcilla o masilla en estado pastoso. Las dimensiones deben ser tales que no permitan al proyectil atravesarlo, de forma que la totalidad de la masa del proyectil quede incrustada dentro del objetivo. El objetivo debe encontrarse pendiendo del hilo y en reposo cuando es impactado por el proyectil. Debido al impacto, se va a producir un desplazamiento de la posición inicial de equilibrio, dando origen a un movimiento oscilatorio. La amplitud alcanzada durante la oscilación, dependerá de la cantidad de energía cinética o de la cantidad de movimiento que el proyectil haya transferido al conjunto objetivo-proyectil. La amplitud puede ser obtenida mediante la medición del ángulo Θ , la variación de altura o midiendo el desplazamiento horizontal del conjunto.

- Velocidad de impacto del proyectil.

Antes de plantear la expresión de la velocidad de impacto del proyectil, es necesario hacer unas aclaraciones de importancia.

El choque producido del proyectil contra el objetivo es del tipo inelástico. Esto quiere decir que al producirse el impacto la energía cinética inicial no se conserva, es decir, que existe al menos una fracción de la energía cinética inicial que se convertirá en otro tipo de energía. La energía total debe forzosamente conservarse tal y como dice el principio de conservación de la energía. De esto último se sacará la velocidad de impacto del proyectil.

En realidad, el choque entre objetos macroscópicos se produce casi siempre de manera inelástica, existiendo muy pocas excepciones. El choque gravitatorio o el choque entre partículas son una de esas excepciones.

Tras el impacto, la energía cinética que trae el proyectil se dividirá en dos partes. Una de ellas se transforma o transfiere como energía cinética del conjunto objetivo-proyectil, mientras que la segunda parte se transforma en energía interna del sistema. La primera parte de energía se demuestra simplemente porque el conjunto ha sido acelerado como consecuencia del impacto. En el caso del péndulo, ha sido sacado de su posición de reposo y ha comenzado a oscilar en torno a su posición de equilibrio. La energía interna es aquella que ha permitido al proyectil abrirse camino dentro del objetivo, deformando, desplazando y fisurando al material del que está compuesto el objetivo, llegando incluso a deformar o fragmentar el proyectil. Dentro del objetivo pueden existir distintos grados de deformación plástica y elástica dependiendo de las características del material y de la velocidad y características del proyectil. Esta energía va a resultar finalmente asociada con un aumento de la temperatura, tanto del objetivo como del proyectil.

Finalmente, aplicando la ley de conservación de la energía, la ecuación de cantidad de movimiento, energía cinética y energía potencial, se llega a la expresión genérica de la velocidad de impacto del proyectil:

$$v_p = \frac{m_p + m_o}{m_p} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (L_{cable} - \sqrt{(L_{cable}^2 - x_{horizontal}^2)})}$$

➤ Terminología balística.

La terminología balística se define como el estudio sobre los efectos de un proyectil en un objetivo. Las condiciones en las que el proyectil impacta sobre el objetivo dependen fundamentalmente de los materiales, de la velocidad de impacto, del ángulo de impacto, del espesor del objetivo y de las dimensiones y geometría del proyectil.

Para clasificar los impactos, la velocidad es el parámetro más simple. Sin embargo, resulta muy difícil clasificarlos de forma absoluta por un solo parámetro. Para realizar una primera aproximación, se han propuesto varias clasificaciones. Resumiéndolas, y citando los efectos sobre el material, se puede proponer la siguiente clasificación:

- Baja velocidad ($v < 50$ m/s). En la mayor parte de los casos se producen efectos elásticos, o deformación plástica localizada.

- Media velocidad ($50 < v < 500$ m/s). Se observa una deformación plástica generalizada.

- Alta velocidad ($500 < v < 2000$ m/s). La resistencia viscosa del material aún tiene importancia.

- Hipervelocidad ($v > 2000$ m/s). El material puede considerarse como un fluido hidrodinámico.

Respecto al ángulo de impacto, se define según las normas inglesas como el ángulo entre la línea de llegada del proyectil y la normal al plano del objetivo, como puede verse en la figura 2.2. El ángulo puede verse influido por otros factores como la aerodinámica y la estabilidad del proyectil en vuelo.

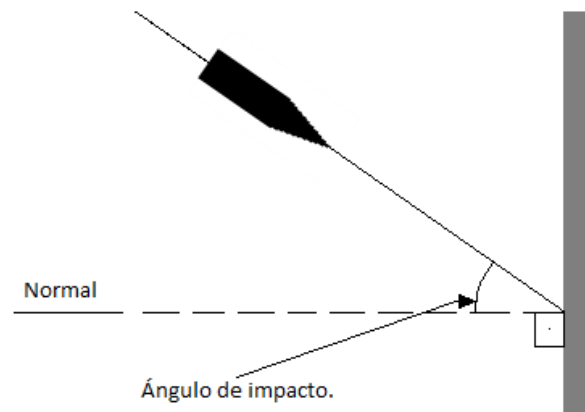


Figura 2. 2 - Ángulo de impacto.

La geometría del proyectil es otro factor muy importante para determinar el modo de fallo del objetivo. Los proyectiles afilados muestran una acción cortante en la cual el fallo del objetivo se centra sobre el eje del proyectil. Las formas desafiladas muestran un modo de penetración a modo de tapón. La transición depende de la forma del proyectil y hay que destacar que la forma puntiaguda o achatada del proyectil juega un papel importante en la estabilidad de la penetración del proyectil. El criterio de formas achatado o afilado se puede clasificar según el valor de la relación longitud/calibre. Si el valor de esta relación es superior a la unidad, se trata de un proyectil puntiagudo, y si es menor, achatado.

Otra variable muy importante en los impactos es el espesor del objetivo contra el que impacta el proyectil. Por lo tanto, podemos clasificar los objetivos según el espesor. Se conoce como objetivo grueso cuando el contorno trasero al impacto influye en el proceso de penetración después de un sustancial recorrido dentro del objetivo, y como objetivo semi-infinito cuando el contorno trasero no influye en el proceso de penetración, es decir, cuando no atraviesa completamente el objetivo. Como complemento al espesor, se debe mencionar a la composición de la placa, ya que de ella también depende el impacto. El objetivo puede estar compuesto por una placa sencilla, por placas simples como los materiales compuestos tipo sándwich, o por un conjunto de placas espaciadas entre sí; la forma puede ser curva, irregular, lisa..., etc., en función del acabado superficial.

Otro aspecto fundamental en los mecanismos de penetración es la valoración del material del que está compuesto el objetivo. En balística resulta muy interesante tener una clasificación de la penetrabilidad de un proyectil estándar sobre diferentes materiales. Normalmente, los materiales de los objetivos son caracterizados como sólidos, pero algunas veces podrían llegar a comportarse como un fluido. Esto último ocurre cuando el objetivo se ve afectado por las altas presiones producidas por impactos a Hipervelocidad. Algunos modelos de materiales sólidos pueden incluir uno o más dominios: elástico, plástico, viscoso. Además, es complicado obtener una respuesta exacta del material por la alta presión a la que es sometido durante la penetración y por las distintas deformaciones y modelos de fallos que ocurren.

Debido a la gran cantidad de clases de proyectiles y objetivos, existen una gran variedad de comportamientos una vez que se produce el contacto entre ambos. En un impacto, el proyectil puede perforar el objetivo, penetrarlo y también puede aparecer el fenómeno de *ricochet*, es decir, que el proyectil rebote debido al ángulo de ataque.

Atendiendo a los escenarios y clasificación anteriores, se pueden distinguir según cada caso distintos fenómenos producidos por el impacto, que pueden resumirse en:

- Dinámica y vibraciones estructurales: en ellos la geometría estructural es predominante, siendo relevantes en los impactos a baja velocidad, y se puede estudiar mediante métodos de integración implícita o explícita en el tiempo.

- Propagación de ondas de tensión y de choque: en los impactos a velocidades medias y bajas es importante analizar detalladamente el efecto de las ondas de tensión, que se convierten en ondas de choque para impactos a Hipervelocidad.

- Comportamiento no lineal del material: plasticidad, rotura, dependencia de la velocidad de deformación, dependencia de la energía interna o temperatura. Se produce en mayor medida al aumentar la velocidad de impacto, aunque para velocidades muy elevadas el material pasa a comportarse prácticamente como un fluido, pudiendo despreciarse su resistencia.

- Grandes desplazamientos: es decir, cambios de geometría y rotaciones finitas que a su vez influyen en las cargas y su efecto.

- Grandes deformaciones: los alargamientos unitarios de los materiales en fases sólidas pueden superar el 100%. Bajo presiones muy elevadas el material se comporta como un fluido, con deformaciones muy grandes.

- Contactos y fenómenos de interfaz en los contornos: el contacto es clave en cualquier modelo de impacto, ya que a través de él se transmiten las cargas.

- Penetración y perforación: por la rotura del material del objetivo. Se llama penetración cuando el proyectil no traspasa el objetivo, y perforación cuando el proyectil penetra totalmente el objetivo pasando al otro lado del mismo.

- Fenómenos locales de rotura: dentro de los muchos que se pueden encontrar, se explican tres de ellos. “Scabbing” o fallo de material debido a la reflexión por la onda inicial de compresión, semejante al fenómeno bajo una carga explosiva. “Petalling”, muy frecuente que se produzca en planchas finas por impacto de proyectiles cónicos a velocidades relativamente lentas ya que el material se deforma en su parte trasera más que el propio proyectil, se exceden las propiedades elásticas de la armadura y empieza a romperse alrededor de la punta del proyectil. “Plugging” o fallo debido al arrancado de una sección de la placa producido alrededor del movimiento. Este fenómeno ocurre en planchas muy duras de delgado espesor. Estos mecanismos de rotura se pueden observar en la figura 2.3.

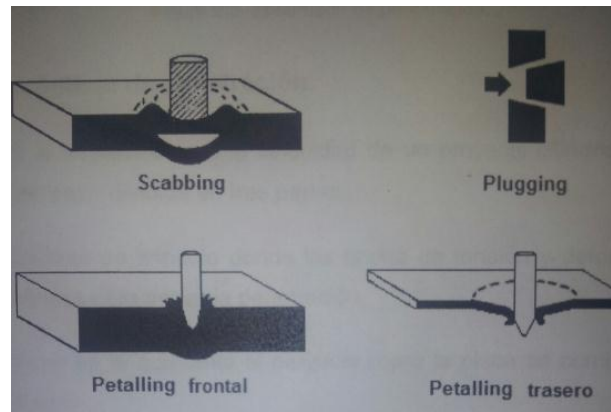


Figura 2. 3 - Fenómenos locales de rotura.

En lo que a la penetración se refiere, la máxima penetración aparece para proyectiles largos y de alta densidad. La deformación del proyectil aumenta con el diámetro, y a su vez, disminuye la penetración. En la figura 2.4 se puede observar cómo ocurre el fenómeno de penetración, que se explica más detenidamente a continuación.

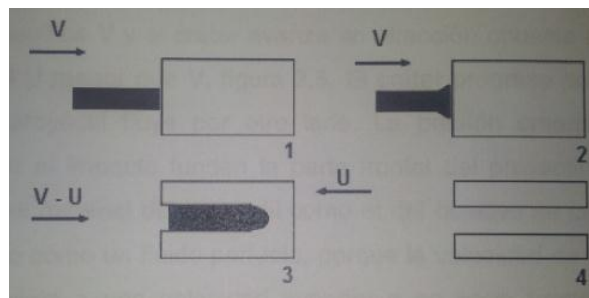


Figura 2. 4 - Fenómeno de penetración.

➤ El fenómeno de penetración.

En general, el contacto a alta velocidad de un proyectil cilíndrico contra un objetivo puede estar dividido en tres partes:

- La fase de impacto, donde las ondas de tensión y deformación son críticas para iniciar la penetración.
- La fase en la que tanto el proyectil como la placa se comportan como fluidos.
- La tercera fase, que es la penetración propiamente dicha.

En el instante del impacto, la onda de tensión se inicia en el proyectil y en el objetivo, y aparecen unas tensiones muy elevadas en el área del impacto. El alto nivel de tensiones producido inicialmente origina un cráter y el proyectil penetra la cara del objetivo, debido a la plastificación de los materiales.

Después de la primera fase de impacto, las tensiones se han debilitado y han progresado a lo largo del cráter. Durante esta fase se creará un comportamiento hidrodinámico debido a que a alta velocidad las tensiones en el fondo del cráter superan las tensiones del material del proyectil y del objetivo. Durante la penetración, el proyectil puede estar parcialmente roto, lo que favorece la plasticidad. La nariz del proyectil irá avanzando con la velocidad específica V y el cráter avanza en dirección opuesta al proyectil con una velocidad U menor que V , figura 2.4. El cráter progresa por fallo dúctil y el material del proyectil fluye por otro lado. La presión creada y la energía transmitida por el impacto funden la parte frontal del proyectil y el fondo del cráter. Tanto el material del proyectil como el del objetivo se comportan como fluidos pero no como fluidos perfectos, ya que la velocidad trasera del proyectil es superior a la de la parte frontal que sigue la velocidad de avance del cráter, lo que hace que el proyectil siga erosionándose. El material, que comienza a erosionarse antes, genera fuerzas en sentido opuesto al avance del proyectil fluyendo entre la pared del cráter y lo que queda del proyectil. El proyectil comienza a consumirse y empieza a generar un movimiento giratorio sobre sí mismo centrado en su punta.

Como resumen, si la velocidad del proyectil es suficientemente alta, fluye plásticamente ejerciendo una presión en el fondo del cráter, provocando que el proyectil gire sobre sí mismo en su punta.

➤ El blindaje en la actualidad.

Actualmente, hay un amplio mercado que ofrece bastantes opciones de blindaje según sean las necesidades a cubrir, aunque algo que todas esas opciones tienen en cuenta es la relación protección/peso, debido a la gran importancia del peso en numerosas aplicaciones. Algunos ejemplos de estas aplicaciones pueden encontrarse en el mundo de la automoción, donde blindar un vehículo completamente con materiales pesados haría que perdiese potencia y que sus capacidades se viesan mermadas. Igual ocurre en el caso de satélites o transbordadores espaciales. Un ejemplo más cercano es el caso de los chalecos antibalas, que deben resistir un impacto balístico y ser ligeros.

En esta tendencia de menor peso y máxima protección existen diferentes tipos de materiales como:

- el policarbonato, usado para ventanas, cristales de automóviles, lentes, etc.,
- el kevlar, nombre comercial de una fibra orgánica inventada por la empresa Dupont en los años setenta. Esta última fibra se obtiene a base de la polimerización de materiales orgánicos aromáticos y se utiliza para la

elaboración de multitud de productos, como chalecos anti-balas, estructuras de aviones, equipo de vela y blindajes de vehículos. Dicha fibra presenta gran resistencia a la tensión, tan resistente como el acero incluso, y es muy ligera, lo que permite fabricar un blindaje sin aumentar mucho el peso. Además, es una fibra muy difícil de romper y cortar, presenta muy baja deformación con cambios de temperatura (se descompone a una temperatura superior a 430°C), sus propiedades se mantienen casi estables en condiciones de alta humedad y es auto extingible a llama directa. Todas estas buenísimas propiedades hacen de este material uno de los más utilizados en la industria del blindaje.

- Spectra Shield es una fibra que se obtiene a partir de la transformación del polietileno, llegándose a obtener la fibra más ligera y más resistente que hay en el mercado. Es 10 veces más resistente que el acero, 4 veces más resistente que nylons y poliésteres, mantiene sus propiedades balísticas al estar húmedo, es resistente a la corrosión química, puede ser cortado para darle la forma necesaria y es auto extingible a llama directa.

Poniendo como ejemplo de blindado un objetivo que sea alcanzado por un proyectil, se tiene el caso de los carros de combate. El blindaje laminado actual de los tanques se diseña para resistir la penetración ante proyectiles a altas velocidades, muy esbeltos y puntiagudos. El principal objetivo del diseño es dispersar un impacto tan concentrado y absorber los efectos térmicos producidos.

El tipo de material de estos carros de combate es rara vez acero cementado en una cara, ya que es relativamente pesado y no tan fuerte como los mejores materiales no metálicos, como el kevlar, pero en cambio, es más difícil de dañar por desgarrar debido al espesor de la capa dúctil de la parte no tratada superficialmente.

A igualdad de peso, los blindajes del tipo kevlar son superiores a las placas de acero siempre y cuando el blindaje no metálico esté protegido de la acción cortante de proyectiles de cabeza plana, ya que en este caso no se puede incrementar la acción protectora del blindaje intentando trasladar el daño al proyectil.

Respecto a los proyectiles, comparando los de latón frente a los de plomo, los primeros presentan una menor densidad, una punta más plana y sufren menor deformación, con lo que aumenta el efecto de corte de la protección. Contra este tipo de balas los chalecos antibalas de kevlar no son eficaces debido a este último efecto. Todo esto hace que se diseñen los blindajes en función de las sollicitaciones de impacto que pueden recibir. Por ello, es interesante conocer la variación de los parámetros del impacto y sus consecuencias.

La capacidad de soportar impactos normalmente se evalúa en función del V50, que se define como la velocidad a la que hay un 50% de posibilidades de parada para un determinado tipo de proyectil, impactando en un objetivo determinado, como puede verse en la figura 2.5.

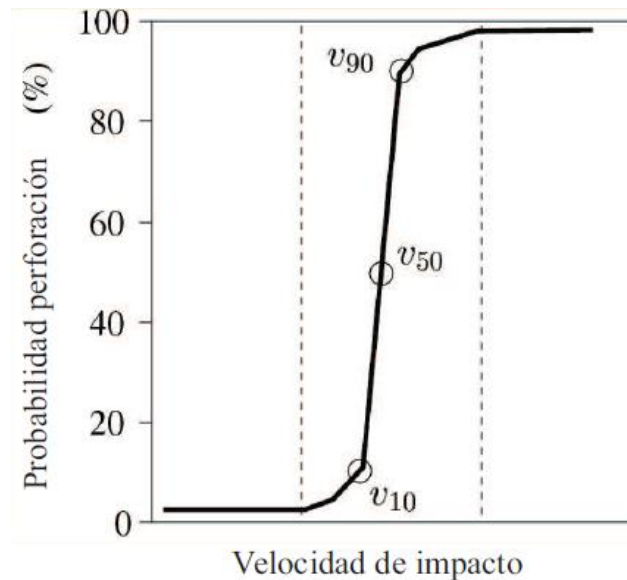


Figura 2. 5 - Probabilidad de perforación frente a velocidad de impacto.

Otro factor importante es el DOP o grado de penetración, que ofrece una idea de cuánto se ha deformado la parte posterior de la placa del blindaje en los casos en los que no hay perforación. En la figura 2.6 se aprecia el grado de penetración o DOP en ensayos reales realizados por la NASA.



Figura 2. 6 - Grado de penetración o DOP.

2.2. MODELOS ANALÍTICOS PREVIOS.

2.2.1. DESARROLLO DE LOS MODELOS SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS FRENTE A IMPACTOS.

Los nuevos requerimientos de fuerza, rigidez y ligereza en componentes estructurales han provocado un auge en el área de los materiales compuestos. El desarrollo técnico de este tipo de componentes ha tenido lugar principalmente en las industrias aeronáutica y aeroespacial, en las que se imponen criterios muy estrictos a la hora de seleccionar un material, particularmente en la densidad del mismo, ya que una pequeña reducción de densidad supone una reducción de la masa total, lo que conlleva un ahorro de energía y combustible. Los materiales compuestos más usados para aplicaciones estructurales en estos sectores están formados por fibras de carbono dentro de una matriz de epoxi. Esta combinación presenta buenas propiedades mecánicas, alta resistencia a la corrosión y a fatiga, y una densidad baja (1400kg/cm^3).

Antes de diseñar un componente estructural de este tipo de laminado, es necesario conocer el comportamiento mecánico de cara a las cargas que se aplicarán sobre él. Este tipo de laminados trabajan bien bajo esfuerzos planos o de flexión, ya sean estáticos o alternantes, pero presentan menor resistencia frente a impactos perpendiculares. Este tipo de impactos pueden romper la continuidad a lo largo de los pliegues y llegar a causar otro tipo de daño no visible a simple vista, y que puede extenderse más allá de la zona de impacto.

Además, la reducción de las propiedades por impactos bajo tensiones fluctuantes es un peligro adicional, y este tipo de esfuerzos son bastante comunes. El estabilizador horizontal de un avión comercial, con frecuencia fabricado con laminado carbono/epoxi, puede sufrir impactos de proyectiles o granizo durante el despegue, aterrizaje o durante el vuelo; un satélite en órbita puede ser también impactado por, por ejemplo, uno de los infinitos pequeños fragmentos de basura espacial. Por tanto, es obvio que para el correcto diseño de ciertos laminados carbono/epoxi se debe tener en cuenta el impacto de proyectiles a alta velocidad.

Los primeros estudios experimentales sobre el comportamiento de materiales compuestos frente a impactos balísticos tuvieron lugar en los años sesenta. Este tipo de investigación se realizaba principalmente para los militares en los setenta, y hasta finales de los años ochenta la documentación era secreta hasta que se publicaron una serie de estudios, como por ejemplo el de Vasudev y Meehlman (1987) sobre el comportamiento frente a impactos balísticos de las fibras de vidrio laminadas en epoxi y matrices de vinilester. Cantwell (1988) publicó un análisis sobre el daño en laminados carbono/epoxi a varias velocidades de impacto, desde 10 a 500 m/s. El daño fue medido por una inspección no destructiva por ultrasonidos. Este último estudio fue el

primero en mostrar los efectos y la localización del daño sufrido, y su extensión a lo largo de las diferentes láminas. Fuji et al. (2002) comprobó que para CFRPs a alta velocidad la extensión del daño decrece y, Kim et al. (2003), llevó a cabo varios test de impacto con granizo en cuasi-isotrópicos paneles de carbono/epoxi, identificando los diferentes mecanismos de daño correspondientes a cada velocidad.

Hay también publicaciones sobre impacto balístico en tubos de este tipo de material (Tennyson and Lamontagne, 2000; Will et al., 2002). Su objetivo fue analizar principalmente dos efectos: por un lado el daño en la primera lámina que recibe el impacto, y por otro lado, el efecto producido por el proyectil y los fragmentos dispersados en la cara interior del tubo. Estos experimentos fueron importantes de cara a la gran cantidad de elementos estructurales de doble pared hechos de carbono/epoxi en las industrias aeronáutica y aeroespacial.

Otro tema importante para el diseño de este tipo de componentes es que pueden llegar a estar sujetos a temperaturas muy bajas en servicio, como es el caso de los aviones (-60°C) y de los transbordadores espaciales (-150°C). Estudios sobre este tema han sido realizados por López-Puente et al. (2002) explicando cómo la temperatura y el tipo de refuerzo afectan al tamaño del área dañada de CFRPs cuando recibe impactos a alta velocidad.

Realizar modelos numéricos del problema requiere el uso de códigos de elementos finitos tridimensionales, considerando la naturaleza anisotrópica de los laminados compuestos, y conlleva altos costes computacionales y lleva bastante tiempo de cálculo. Con modelos de dos dimensiones axisimétricos el tiempo de resolución es menor e hipótesis de simplificación se pueden conseguir soluciones bastante precisas. Nandlall et al. (1998) utilizó el código explícito de elementos finitos LS-DYNA 2D para predecir la extensión de los diferentes tipos de daño causados por el impacto de fragmentos sobre laminados de cristal o poliéster, ignorando la anisotropía del laminado ya que consideró que la respuesta estructural era local.

Otra forma de disminuir el tiempo de resolución consiste en discretizar el laminado con una configuración axisimétrica usando elementos unidimensionales y reduciendo el número de grados de libertad del modelo. Sun y Potti (1996) calcularon los límites balísticos y las velocidades residuales después del impacto de los proyectiles usando un modelo con elementos finitos de dos nodos axisimétricos, y dos grados de libertad por nodo.

Algunas simulaciones completas en tres dimensiones, como la presentada por López-Puente et al. (2003), incluían un modelo del efecto del impacto sobre laminados CFRP. Chen et al. (1997) utilizó un interesante método en sus simulaciones de impactos a alta velocidad (hasta 500m/s) de fragmentos en laminados carbono/epoxi; usaron la teoría Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) para la discretización espacial, un método que había

sido utilizado al final de los años setenta para resolver problemas de astrofísica y de las colisiones de partículas sub-atómicas, y que después se extendió a la Mecánica de Sólidos.

También existen modelos analíticos basados en un análisis de la respuesta global del sistema y la aplicación de los principios de conservación de momento o balance de energía. Estos análisis proporcionan ecuaciones algebraicas o diferenciales cuyas soluciones proporcionan valores cercanos a los de los procesos de diseño de componentes estructurales. La mayoría de estos modelos se han desarrollado en el área de la protección balística, utilizando laminados flexibles de fibras de aramida o polietileno (Navarro, 1998; Naik y Doshi, 2005; Chocrón et al., 1997). Un número pequeño de modelos consideran fibras de vidrio o laminados de carbono cuya función estructural es resistir cargas estáticas o dinámicas y que pueden ser sometidos a impactos de alta velocidad.

2.2.2. DESARROLLO DE LOS MODELOS SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES METÁLICOS FRENTE A IMPACTOS.

Como se ha podido comprobar en el anterior apartado, el desarrollo de modelos sobre materiales compuestos es bastante grande. En el caso de los metales, también existen una gran cantidad de estudios y experimentos sobre su comportamiento frente a impactos.

Sin embargo, en este punto el trabajo se centra en explicar el estudio analítico en el que precisamente se basa el modelo calculado en este proyecto.

En el documento realizado por X.W. Chen y Q.M. Li se propone un modelo adimensional basado en la dinámica de cavitación para predecir la profundidad de penetración en diferentes materiales sujetos a un impacto normal de un proyectil indeformable. El modelo propuesto depende de dos parámetros adimensionales y muestra una gran concordancia con ensayos de impactos realizados. Sin embargo, el modelo calculado en este proyecto se basa en una modificación del mismo, el realizado por Q.M. Li, H.J. Weng y X.W. Chen.

El modelo previo basado en la dinámica de cavitación, es modificado para tener en cuenta el aumento del área de contacto entre la cabeza del proyectil y el material antes de que el proyectil penetre totalmente el mismo.

Este modelo modificado es aplicable a problemas de penetración en los cuales la longitud de la cabeza del proyectil sea del mismo orden que la profundidad penetrada, es decir, en aquellos casos en los que sus valores sean similares.

Antes de explicar la modificación introducida respecto al modelo anterior, se va a proceder a explicar el modelo sin modificar, para poder entender correctamente la modificación.

Basándose en la teoría de la expansión dinámica de la cavidad, la resistencia a la penetración del material que se sufre en la cabeza del proyectil es la siguiente:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (AN_1^* \sigma_e + BN_2^* \rho v^2)$$

donde σ_e es el límite elástico del material y ρ su densidad. A y B son dos parámetros adimensionales explicados más adelante, d es el diámetro del proyectil y v es la velocidad instantánea en el proceso de penetración. N_1 y N_2 son dos parámetros adimensionales que dependen de la forma de la cabeza del proyectil:

$$N_1^* = 1 + \frac{8\mu}{d^2} \int_0^h y \, dx$$
$$N_2^* = \frac{8\mu}{d^2} \int_0^x \frac{y * y'^2}{1 + y'^2} \, dx - \frac{8}{d^2} \int_0^x \frac{y * y'^3}{1 + y'^2} \, dx$$

Donde h es la longitud de la cabeza del proyectil, μ el coeficiente de fricción, $y(x)$ la ecuación que describe la cabeza del proyectil. Estas tres expresiones requieren la satisfacción de las siguientes hipótesis:

- El proyectil es rígido y no será deformado durante el proceso de penetración.
- El proyectil impacta en dirección normal.
- No existe fricción a lo largo del vástago del proyectil.
- La superficie libre trasera tiene influencia negativa durante el proceso de penetración.

Además, dichas tres expresiones requieren que la cabeza del proyectil penetre completamente en el material. Cuando la profundidad del impacto es del orden de la longitud de la cabeza del proyectil, el área de contacto depende de la profundidad de la penetración, por lo que se hizo la siguiente modificación en el modelo:

$$N_1^* = 1 + \frac{2\mu}{y^2} \int_0^x y \, dx$$
$$N_2^* = \frac{2\mu}{y^2} \int_0^x \frac{y * y'^2}{1 + y'^2} \, dx - \frac{2}{y^2} \int_0^x \frac{y * y'^3}{1 + y'^2} \, dx$$

El parámetro B depende de la compresibilidad del material y su valor está entre 1 y 1,5. A tiene la siguiente expresión:

$$A = \frac{2}{3} \left[1 + \ln \frac{E}{3(1 - \nu)\sigma_e} \right]$$

Este modelo modificado es en el que está basado el calculado en este proyecto y que en el siguiente capítulo se detalla minuciosamente.

Capítulo 3.

Descripción del modelo analítico calculado.

3.1. INTRODUCCIÓN Y DESARROLLO DEL MODELO.

El modelo analítico calculado en el presente trabajo se basa en el modelo modificado explicado anteriormente. Se toma como base igualmente la resistencia a la penetración explicada en dicho modelo, calculando asimismo los parámetros adimensionales que dependen de la cabeza del proyectil.

Posteriormente, se aplica la segunda ley de Newton para despejar la velocidad en función de la profundidad alcanzada, x , y de los demás parámetros presentes en la fuerza resistente a la penetración, la cual se convierte en energía cinética para frenar el avance del proyectil.

Una vez aplicada la segunda ley de Newton, se procede a adimensionalizar todos los parámetros de la ecuación resultante y se despeja la velocidad adimensionalizada en función de la coordenada x para después poder obtener la velocidad real en función de la misma coordenada.

Se debe mencionar que todo lo anterior se debe aplicar en todas las distintas partes del impacto, ya que en función de a qué profundidad se encuentre el proyectil, la ecuación del perfil de la cabeza cambia para evaluar correctamente el aumento del área de contacto.

Una vez se tiene todo esto calculado, se procede a realizar lo mismo con datos de otras aleaciones de aluminio para comparar los resultados en todos los casos. Unos de los resultados más importantes que se van a estudiar son la velocidad residual, si la hay, y el límite balístico para un rango de velocidades iniciales de impacto, espesores de placa, etc.

3.2. ECUACIÓN DEL PERFIL DEL PROYECTIL EN CADA TRAMO DE LA PENETRACIÓN.

Debido a que en este trabajo la longitud de la cabeza del proyectil es igual o mayor que el espesor de la placa, se distinguen tres zonas en las que se divide el impacto: la primera, en la que la cabeza se introduce en la placa y la atraviesa hasta perforarla; la segunda, en la que el área de contacto de entrada del proyectil sigue aumentando y el agujero de salida comienza a crecer; la tercera, en la que el área de contacto que aumenta es únicamente la de salida; la cuarta, donde la cabeza del proyectil ya ha atravesado la placa y ya está hecho el agujero en la misma, por lo que ya no aumenta el área de contacto entre el proyectil y la placa.

A continuación, se explican las cuatro zonas y la ecuación del perfil en cada una de ellas, considerando siempre los ejes fijos en la placa, justo en el punto de impacto inicial. La dimensión x (sin adimensionar) corresponde a la distancia entre ese punto y la punta de la cabeza del proyectil. Llamando h a la longitud de la cabeza del proyectil, se tiene:

- Parte 1: $0 < x < e$ $y(x) = \frac{d}{2} \cdot \frac{x}{h}$

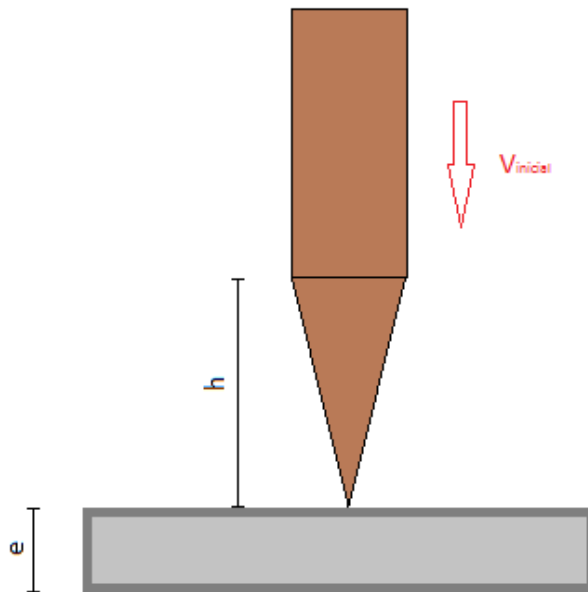


Figura 3. 1 - Parte 1 del impacto.

- Parte 2: $e < x < h$ $y(x) = \frac{d}{2} \cdot \frac{x}{h} - (x - e) \cdot \frac{d}{2h} = \frac{d \cdot e}{2h}$

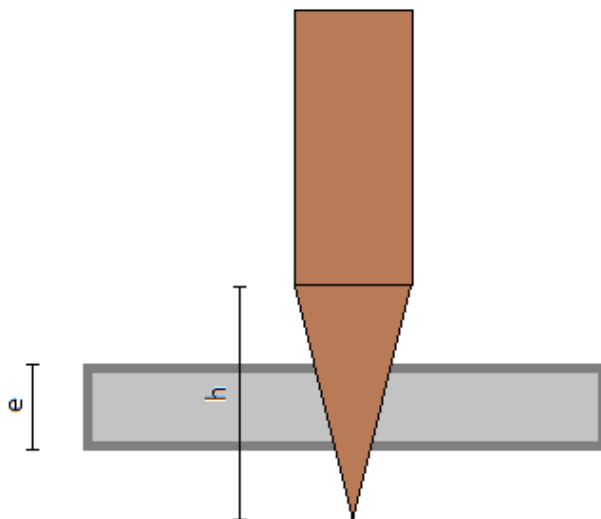


Figura 3. 2 - Parte 2 del impacto.

- Parte 3: $h < x < h + e$ $y(x) = \frac{d}{2} - (x - e) \cdot \frac{d}{2h}$

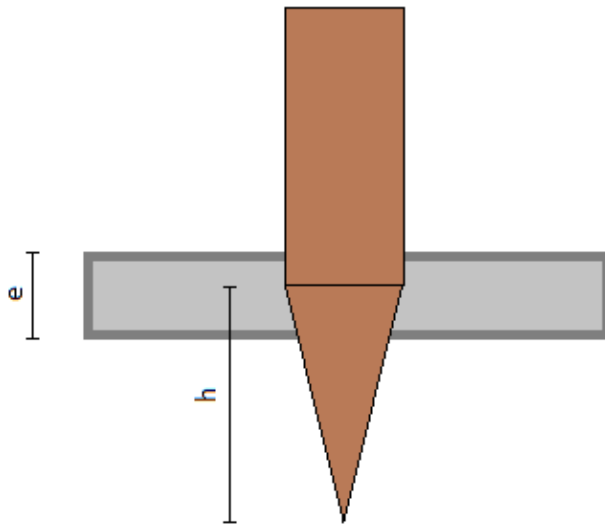


Figura 3. 3 - Parte 3 del impacto.

- Parte 4: $x > h + e$ $y(x) = 0$

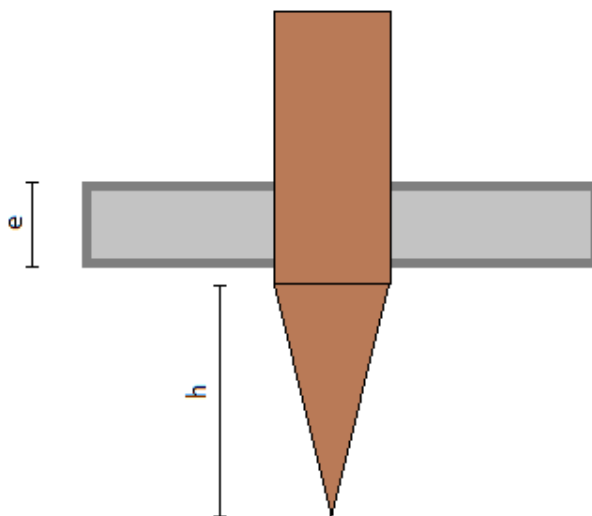


Figura 3. 4 - Parte 4 del impacto.

Después de distinguir las cuatro zonas de la perforación, se debe decir que a veces no se pasa de la primera zona. Esto ocurre en aquellos impactos cuya velocidad inicial está por debajo del límite balístico y no llegan a perforar la placa. También mencionar que de ahora en adelante no se considera la fricción, es decir, que el coeficiente de rozamiento es cero, y que la parte cuarta no se estudia, ya que la fuerza resistente es cero.

3.3. PARÁMETROS ADIMENSIONALES Y FUERZA RESISTENTE A LA PENETRACIÓN PARA CADA PARTE DE LA MISMA.

En este punto del trabajo, se calculan los parámetros adimensionales que forman parte de la fuerza resistente, cambiando, eso sí, los límites de integración para adaptarlos a este modelo.

- Parte 1.

$$N_1^* = 1 + \frac{2\mu}{y^2} \int_0^x y \, dx = 1$$

$$N_2^* = \frac{2\mu}{y^2} \int_0^x \frac{y * y'^2}{1 + y'^2} dx - \frac{2}{y^2} \int_0^x \frac{y * y'^3}{1 + y'^2} dx = -\frac{4d^2 h^2}{4d^2 h^2 + 16h^4} = -\frac{d^2}{d^2 + 4h^2}$$

$$F = \pi * y^2 (AN_1^* \sigma_e + BN_2^* \rho v^2) = \pi \frac{d^2 x^2}{4h^2} \left[-\frac{Bd^2 v^2 \rho}{d^2 + 4h^2} + A\sigma_e \right]$$

- Parte 2.

$$N_1^* = 1 + \frac{2\mu}{y^2} \left[\int_0^e \frac{d}{2h} x \, dx + \int_e^x y \, dx \right] = 1$$

$$N_2^* = \frac{2\mu}{y^2} \left[\int_0^e \frac{\frac{d}{2h} x * \left(\frac{d}{2h}\right)^2}{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} dx \right] - \frac{2}{y^2} \left[\int_0^e \frac{\frac{d}{2h} x * \left(\frac{d}{2h}\right)^3}{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} dx \right] = -\frac{8h^2}{d^2 e^2} \left[\frac{d^4 e^2}{2(4d^2 h^2 + 16h^4)} \right]$$

$$F = \pi * y^2 (AN_1^* \sigma_e + BN_2^* \rho v^2) = \pi \frac{d^2 e^2}{4h^2} \left[Bv^2 \rho \left(-\frac{8h^2}{d^2 e^2} \left[\frac{d^4 e^2}{8d^2 h^2 + 32h^4} \right] \right) + A\sigma_e \right]$$

- Parte 3.

$$N_1^* = 1 + \frac{2\mu}{y^2} \left[\int_0^e \frac{d}{2h} x \, dx + \int_e^h \frac{ed}{2h} dx + \int_h^x y \, dx \right] = 1$$

$$N_2^* = \frac{2\mu}{y^2} \left[\int_0^e \frac{\frac{d}{2h} x * \left(\frac{d}{2h}\right)^2}{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} dx + \int_h^x \frac{y * y'^2}{1 + y'^2} dx \right] - \frac{2}{y^2} \left[\int_0^e \frac{\frac{d}{2h} x * \left(\frac{d}{2h}\right)^3}{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} dx + \int_h^x \frac{y * y'^3}{1 + y'^2} dx \right]$$

$$= -\frac{8h^2}{d^2(e+h-x)^2} \left[\frac{d^4(e+h-x)^2}{8h^2(d^2+4h^2)} \right]$$

$$F = \pi * y^2 (AN_1^* \sigma_e + BN_2^* \rho v^2) =$$

$$= \pi \frac{d^2(e+h-x)^2}{4h^2} \left[Bv^2 \rho \left(-\frac{8h^2}{d^2(e+h-x)^2} \left[\frac{d^4(e+h-x)^2}{8h^2(d^2+4h^2)} \right] \right) + A\sigma_e \right]$$

Con $A = \frac{2}{3} \left[1 + \ln \frac{E}{3(1-\nu)\sigma_e} \right]$, y B entre 1 y 1,5, dependiendo de la compresibilidad del material.

3.4. SOLUCIÓN DEL MODELO PARA OBTENER LA VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE LA PROFUNDIDAD PENETRADA.

Para obtener la solución en cada parte, se aplica la segunda ley de Newton, igualando la fuerza resistente a la energía cinética que aparece para frenar el proyectil.

Primero se iguala la expresión de la fuerza resistente como bien se ha dicho antes. A continuación, se agrupan términos y se simplifican algunos de ellos en función de dos parámetros, alfa y épsilon. El parámetro épsilon, al ser de poca importancia su valor, será utilizado para simplificar la ecuación resultante. Pero antes de esto último se deben adimensionalizar todos los términos de la ecuación, incluidos los límites de las partes:

$$x^* = \frac{x}{e}, \quad v^* = \frac{v}{v_{inicial}}, \quad v^{2*} = v^2 \cdot v_{inicial}^2 = w \cdot v_{inicial}^2$$

$$Parte\ 1 \rightarrow 0 < x < 1 \quad Parte\ 2 \rightarrow 1 < x < 1,5 \quad Parte\ 3 \rightarrow 1,5 < x < 2,5$$

De ahora en adelante, por simplicidad, el asterisco de las variables adimensionales desaparece, pero igualmente siguen siendo adimensionales.

Una vez adimensionalizada la ecuación, se va a realizar un desarrollo en serie empleando el método de perturbaciones regulares a la misma para simplificar los cálculos. Consiste en separar la ecuación en dos órdenes, orden cero y orden uno. El primero corresponde a todos aquellos términos que no tengan épsilon, y el orden uno corresponde a los términos que sí tienen épsilon. Así, la solución pasa a ser de la siguiente forma:

$$w = w_{(0)} + \varepsilon \cdot w_{(1)}$$

De ahora en adelante, se calcularán por separado el orden cero y el orden uno de la ecuación y después se juntarán para obtener la solución total. De esta forma se consigue simplificar mucho el cálculo y la aproximación resulta ser muy certera. También se deben tener en cuenta los siguientes valores:

$$\varepsilon = \frac{\pi e d^4 B \rho}{2m(d^2 + 4h^2)} \quad \alpha = \frac{\pi e d^2 A \sigma_e}{2m v_i^2}$$

➤ Parte 1 → $0 < x < 1$:

Aplicando la segunda ley de Newton, simplificando términos y adimensionalizando después queda lo siguiente.

$$\begin{aligned} \pi \frac{d^2 x^2}{4h^2} \left[-\frac{Bd^2 v^2 \rho}{d^2 + 4h^2} + A\sigma_e \right] &= \frac{-m}{2} \frac{dv^2}{dx}; & -\frac{B\pi d^4 v^2 \rho}{4h^2(d^2 + 4h^2)} x^2 + \frac{\pi d^2 x^2 A\sigma_e}{4h^2} &= \frac{-m}{2} \frac{dv^2}{dx}; \\ -\frac{B\pi d^4 \rho v_i^2 e^2}{4h^2(d^2 + 4h^2)} wx^2 + \frac{\pi d^2 e^2 A\sigma_e}{4h^2} x^2 &= \frac{-mv_i^2}{2e} \frac{dw}{dx}; \\ -\frac{B\pi d^4 \rho e^3}{2h^2 m(d^2 + 4h^2)} wx^2 + \frac{\pi d^2 e^3 A\sigma_e}{2h^2 m v_i^2} x^2 &= -\frac{dw}{dx}; \\ -\frac{\varepsilon e^2}{h^2} wx^2 + \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2 &= -\frac{dw}{dx}; \end{aligned}$$

A continuación se resuelven las ecuaciones diferenciales de orden cero y orden uno de forma separada y después se juntan para obtener la solución total.

Orden cero: con $w(0) = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2 &= -\frac{dw}{dx}; \\ w &= 1 - \frac{\alpha e^2}{3h^2} x^3; \end{aligned}$$

Orden uno: con $w(0) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{h^2} w_{(0)} x^2 &= -\frac{dw}{dx}; & -\frac{e^2}{h^2} x^2 + \frac{\alpha e^4}{3h^4} x^5 &= -\frac{dw}{dx}; & -\frac{e^2}{3h^2} x^3 + \frac{\alpha e^4}{18h^4} x^6 &= -w; \\ w &= -\frac{\alpha e^4}{18h^4} x^6 + \frac{e^2}{3h^2} x^3; \end{aligned}$$

Solución total:

$$w = 1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)e^2}{3h^2} x^3 - \frac{\varepsilon \alpha e^4}{18h^4} x^6;$$

➤ Parte 2 → $1 < x < 1,5$:

Aplicando la segunda ley de Newton, simplificando términos y adimensionalizando después queda lo siguiente.

$$\begin{aligned} \pi \frac{d^2 e^2}{4h^2} \left[Bv^2 \rho \left(-\frac{8h^2}{d^2 e^2} \left[\frac{d^4 e^2}{8d^2 h^2 + 32h^4} \right] \right) + A\sigma_e \right] &= \frac{-m}{2} \frac{dv^2}{dx}; \\ -\frac{\pi d^2 e^2 Bv^2 \rho 8h^2 d^4 e^2}{4h^2 d^2 e^2 (8d^2 h^2 + 32h^4)} + \frac{\pi d^2 e^2 A\sigma_e}{4h^2} &= \frac{-m}{2} \frac{dv^2}{dx}; \\ -\frac{\pi B \rho d^4 e^3}{2mh^2 (d^2 + 4h^2)} w + \frac{\pi d^2 e^3 A\sigma_e}{2mv_i^2 h^2} &= -\frac{dw}{dx}; \\ \frac{\varepsilon e^2}{h^2} w - \frac{\alpha e^2}{h^2} &= \frac{dw}{dx}; \end{aligned}$$

A continuación se resuelven las ecuaciones diferenciales de orden cero y orden uno de forma separada y después se juntan para obtener la solución total.

Orden cero: con $w(1) = 1 - \frac{\alpha e^2}{3h^2}$

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha e^2}{h^2} &= \frac{dw}{dx}; w = -\frac{\alpha e^2}{h^2} x + C1; C1 = \frac{\alpha e^2}{h^2} + 1 - \frac{\alpha e^2}{3h^2} = 1 + \frac{2\alpha e^2}{3h^2}; \\ w &= -\frac{\alpha e^2}{h^2} x + 1 + \frac{2\alpha e^2}{3h^2}; \end{aligned}$$

Orden uno: con $w(1) = -\frac{\alpha e^4}{18h^4} + \frac{e^2}{3h^2}$

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{h^2} w_{(0)} &= \frac{dw}{dx}; -\frac{\alpha e^4}{h^4} x + \frac{e^2}{h^2} + \frac{2\alpha e^4}{3h^4} = \frac{dw}{dx}; w = -\frac{\alpha e^4}{2h^4} x^2 + \left(\frac{e^2}{h^2} + \frac{2\alpha e^4}{3h^4} \right) x + C2; \\ C2 &= \frac{\alpha e^4}{2h^4} - \left(\frac{e^2}{h^2} + \frac{2\alpha e^4}{3h^4} \right) - \frac{\alpha e^4}{18h^4} + \frac{e^2}{3h^2} = -\frac{6e^2 h^2 + 2e^4 \alpha}{9h^4}; \\ w &= -\frac{\alpha e^4}{2h^4} x^2 + \left(\frac{e^2}{h^2} + \frac{2\alpha e^4}{3h^4} \right) x - \frac{6e^2 h^2 + 2e^4 \alpha}{9h^4}; \end{aligned}$$

Solución total:

$$w = -\frac{\alpha \varepsilon e^4}{2h^4} x^2 + \frac{e^2(-3h^2(\alpha - \varepsilon) + 2e^2 \alpha \varepsilon)}{3h^4} x + \frac{9h^4 + 6e^2 h^2(\alpha - \varepsilon) + 2e^4 \alpha \varepsilon}{9h^4};$$

➤ Parte 3 → $1,5 < x < 2,5$:

Aplicando la segunda ley de Newton, simplificando términos y adimensionalizando después queda lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\pi d^4 B \rho (e+h)^2}{4h^2(d^2+4h^2)} v^2 - \frac{\pi d^4 B \rho}{4h^2(d^2+4h^2)} v^2 x^2 + \frac{\pi d^4 (e+h) B \rho}{2h^2(d^2+4h^2)} v^2 x + \frac{\pi d^2 A \sigma_e (e+h)^2}{4h^2} \\
 & + \frac{\pi d^2 A \sigma_e}{4h^2} x^2 - \frac{\pi d^2 A \sigma_e (e+h)}{2h^2} x = \frac{-m d^2 v}{2} \frac{dv}{dx}; \\
 & -\frac{\pi d^4 B \rho (e+h)^2 v_i^2}{4h^2(d^2+4h^2)} w - \frac{\pi d^4 B \rho v_i^2 e^2}{4h^2(d^2+4h^2)} w x^2 + \frac{\pi d^4 e (e+h) B \rho v_i^2}{2h^2(d^2+4h^2)} w x + \frac{\pi d^2 A \sigma_e (e+h)^2}{4h^2} \\
 & + \frac{\pi e^2 d^2 A \sigma_e}{4h^2} x^2 - \frac{\pi e d^2 A \sigma_e (e+h)}{2h^2} x = \frac{-m v_i^2}{2e} \frac{dw}{dx}; \\
 & \frac{\pi e d^4 B \rho (e+h)^2}{2h^2 m (d^2+4h^2)} w + \frac{\pi d^4 B \rho e^3}{2h^2 m (d^2+4h^2)} w x^2 - \frac{\pi d^4 e^2 (e+h) B \rho}{h^2 m (d^2+4h^2)} w x - \frac{\pi e d^2 A \sigma_e (e+h)^2}{2h^2 m v_i^2} \\
 & - \frac{\pi e^3 d^2 A \sigma_e}{2h^2 m v_i^2} x^2 + \frac{\pi e^2 d^2 A \sigma_e (e+h)}{h^2 m v_i^2} x = \frac{dw}{dx}; \\
 & \frac{(e+h)^2}{h^2} \varepsilon w + \frac{e^2}{h^2} \varepsilon w x^2 - \frac{2e(e+h)}{h^2} \varepsilon w x - \frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} - \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2 + \frac{2e\alpha(e+h)}{h^2} x = \frac{dw}{dx};
 \end{aligned}$$

A continuación se resuelven las ecuaciones diferenciales de orden cero y orden uno de forma separada y después se juntan para obtener la solución total.

Orden cero: con $w\left(\frac{h}{e}\right) = -\frac{\alpha e}{h} + 1 + \frac{2\alpha e^2}{3h^2}$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} - \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2 + \frac{2e\alpha(e+h)}{h^2} x = \frac{dw}{dx}; \\
 & w = -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} x - \frac{\alpha e^2}{3h^2} x^3 + \frac{e\alpha(e+h)}{h^2} x^2 + C1; \\
 & C1 = 1 + \frac{2e^2\alpha}{3h^2} - \frac{e\alpha}{h} - \frac{\alpha(e+h)}{e} + \frac{h\alpha}{3e} + \frac{\alpha(e+h)^2}{he} = 1 + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e} \right) \alpha; \\
 & w = -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} x - \frac{\alpha e^2}{3h^2} x^3 + \frac{e\alpha(e+h)}{h^2} x^2 + 1 + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e} \right) \alpha;
 \end{aligned}$$

Orden uno: con $w\left(\frac{h}{e}\right) = -\frac{\alpha e^2}{2h^2} + \left(\frac{e^2}{h^2} + \frac{2\alpha e^4}{3h^4}\right) \frac{h}{e} - \frac{6e^2 h^2 + 2e^4 \alpha}{9h^4}$;

$$\frac{(e+h)^2}{h^2} w_{(0)} + \frac{e^2}{h^2} w_{(0)} x^2 - \frac{2e(e+h)}{h^2} w_{(0)} x = \frac{dw}{dx};$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = & -\frac{\alpha(e+h)^4}{h^4}x - \frac{\alpha e^2(e+h)^2}{3h^4}x^3 + \frac{e\alpha(e+h)^3}{h^4}x^2 + \frac{(e+h)^2}{h^2} + \frac{(e+h)^2}{h^2}\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2}\right. \\ & + \frac{h}{e})\alpha - \frac{\alpha e^2(e+h)^2}{h^4}x^3 - \frac{\alpha e^4}{3h^4}x^5 + \frac{e^3\alpha(e+h)}{h^4}x^4 + \frac{e^2}{h^2}x^2 + \frac{e^2}{h^2}x^2\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha \\ & + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e})\alpha + \frac{\alpha 2e(e+h)^3}{h^4}x^2 + \frac{\alpha e^3 2(e+h)}{3h^4}x^4 - \frac{2e^2\alpha(e+h)^2}{h^4}x^3 \\ & - \frac{2e(e+h)}{h^2}x - \frac{2e(e+h)}{h^2}x\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\alpha(e+h)^4}{2h^4}x^2 - \frac{\alpha e^2(e+h)^2}{12h^4}x^4 + \frac{e\alpha(e+h)^3}{3h^4}x^3 + \frac{(e+h)^2}{h^2}x + \frac{(e+h)^2}{h^2}x\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha \\ & + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e})\alpha - \frac{\alpha e^2(e+h)^2}{4h^4}x^4 - \frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6 + \frac{e^3\alpha(e+h)}{5h^4}x^5 + \frac{e^2}{3h^2}x^3 \\ & + \frac{e^2}{3h^2}x^3\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha + \frac{\alpha 2e(e+h)^3}{3h^4}x^3 + \frac{\alpha e^3 2(e+h)}{15h^4}x^5 \\ & - \frac{e^2\alpha(e+h)^2}{2h^4}x^4 - \frac{e(e+h)}{h^2}x^2 - \frac{e(e+h)}{h^2}x^2\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha + C2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6 + \left(\frac{e^3\alpha(e+h)}{5h^4} + \frac{\alpha e^3 2(e+h)}{15h^4}\right)x^5 + \left(-\frac{\alpha e^2(e+h)^2}{12h^4} - \frac{\alpha e^2(e+h)^2}{4h^4}\right. \\ & - \frac{e^2\alpha(e+h)^2}{2h^4})x^4 + \left(\frac{e\alpha(e+h)^3}{3h^4} + \frac{e^2}{3h^2} + \frac{e^2}{3h^2}\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha\right. \\ & + \frac{\alpha 2e(e+h)^3}{3h^4})x^3 + \left(-\frac{\alpha(e+h)^4}{2h^4} - \frac{e(e+h)}{h^2} - \frac{e(e+h)}{h^2}\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha\right. \\ & + \frac{h}{e})\alpha)x^2 + \left(\frac{(e+h)^2}{h^2} + \frac{(e+h)^2}{h^2}\frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha\right)x + C2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6 + \frac{e^3(e+h)\alpha}{3h^4}x^5 - \frac{5e^2(e+h)^2\alpha}{6h^4}x^4 \\ & + \frac{e(11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha))}{9h^4}x^3 \\ & - \frac{(e+h)(7e^3\alpha + 9e^2h\alpha + 5h^3\alpha + 3eh^2(2+5\alpha))}{6h^4}x^2 \\ & + \frac{(e+h)^2(2e^3\alpha + h^3\alpha + 3eh^2(1+\alpha))}{3eh^4}x + C2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C2 & + \frac{2h^2e[11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha)] + e(12e^5\alpha + 3e^4h\alpha - 36e^3h^2\alpha - 36e^2h^3\alpha - 33eh^4\alpha - 25h^5\alpha + 18e(e+h)^2h^2[1+\alpha] - 9eh(e+h)h^2[2+5\alpha] + 6h^4\alpha[e+h])}{18e^3h^3} \\ & = -\frac{e(2e-3h)(6h^2+2e^2\alpha-3eh\alpha)}{18h^4}; \end{aligned}$$

C2

$$\begin{aligned} & -\frac{2h^3e[11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha)]}{18e^3h^4} \\ & + \frac{e(-12e^4h^2 + 18e^3h^3 - 4e^6\alpha - 12e^4h^2\alpha + 36e^3h^3\alpha + 36e^2h^4\alpha)}{18e^3h^4} \\ & + \frac{e(33eh^5\alpha + 25h^6\alpha - 18eh(e+h)^2h^2[1+\alpha] + 9eh^2(e+h)h^2[2+5\alpha] - 6h^5\alpha[e+h])}{18e^3h^4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w &= -\frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6 + \frac{e^3(e+h)\alpha}{3h^4}x^5 - \frac{5e^2(e+h)^2\alpha}{6h^4}x^4 \\
 &+ \frac{e(11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha))}{9h^4}x^3 \\
 &- \frac{(e+h)(7e^3\alpha + 9e^2h\alpha + 5h^3\alpha + 3eh^2(2+5\alpha))}{6h^4}x^2 \\
 &+ \frac{(e+h)^2(2e^3\alpha + h^3\alpha + 3eh^2(1+\alpha))}{3eh^4}x \\
 &- \frac{2h^3e[11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha)]}{18e^3h^4} \\
 &+ \frac{e(-12e^4h^2 + 18e^3h^3 - 4e^6\alpha - 12e^4h^2\alpha + 36e^3h^3\alpha + 36e^2h^4\alpha)}{18e^3h^4} \\
 &+ \frac{e(33eh^5\alpha + 25h^6\alpha - 18eh(e+h)^2h^2[1+\alpha] + 9eh^2(e+h)h^2[2+5\alpha] - 6h^5\alpha[e+h])}{18e^3h^4};
 \end{aligned}$$

Solución total:

$$\begin{aligned}
 w &= -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2}x - \frac{\alpha e^2}{3h^2}x^3 + \frac{e\alpha(e+h)}{h^2}x^2 + 1 + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha + \varepsilon\left[-\frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6\right. \\
 &+ \frac{e^3(e+h)\alpha}{3h^4}x^5 - \frac{5e^2(e+h)^2\alpha}{6h^4}x^4 + \frac{e(11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha))}{9h^4}x^3 \\
 &- \frac{(e+h)(7e^3\alpha + 9e^2h\alpha + 5h^3\alpha + 3eh^2(2+5\alpha))}{6h^4}x^2 \\
 &+ \frac{(e+h)^2(2e^3\alpha + h^3\alpha + 3eh^2(1+\alpha))}{3eh^4}x \\
 &- \frac{2h^3e[11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha)]}{18e^3h^4} \\
 &+ \frac{e(-12e^4h^2 + 18e^3h^3 - 4e^6\alpha - 12e^4h^2\alpha + 36e^3h^3\alpha + 36e^2h^4\alpha)}{18e^3h^4} \\
 &\left. + \frac{e(33eh^5\alpha + 25h^6\alpha - 18eh(e+h)^2h^2[1+\alpha] + 9eh^2(e+h)h^2[2+5\alpha] - 6h^5\alpha[e+h])}{18e^3h^4}\right];
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, se ha obtenido w en función de la coordenada x adimensionalizada. Para obtener la velocidad real en función de la coordenada x real basta con multiplicar w por la velocidad inicial al cuadrado y hacer la raíz cuadrada de eso. También en vez de x , habrá que utilizar x multiplicada por el espesor. Representando la velocidad en función de x para un lanzamiento de ejemplo (con $h=0,03$ m y $e=0,02$ m, y $v_i=190$ m/s) nos queda:

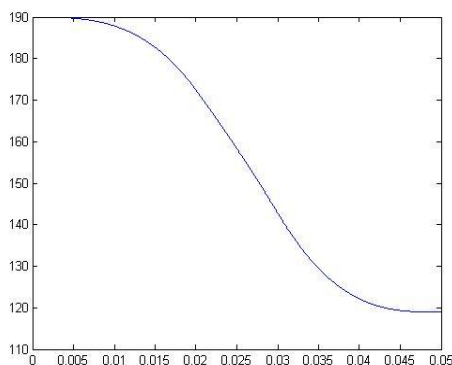


Figura 3. 5 - Impacto a 190 m/s con el modelo analítico.

Como puede verse, en este caso el proyectil ha perforado la placa y ha salido de la misma a unos 120 m/s. Este tipo de gráfica y algunas comparaciones más serán realizados en el siguiente apartado, para otros casos.

Como resumen, a continuación se exponen las diferentes ecuaciones de w en cada parte para impactos de proyectiles cónicos, que es el caso que se trata en este proyecto y del que se ha obtenido el modelo descrito hasta ahora en este capítulo.

➤ Parte 1.

$$w = 1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)e^2}{3h^2}x^3 - \frac{\varepsilon\alpha e^4}{18h^4}x^6;$$

➤ Parte 2.

$$w = -\frac{\alpha\varepsilon e^4}{2h^4}x^2 + \frac{e^2(-3h^2(\alpha - \varepsilon) + 2e^2\alpha\varepsilon)}{3h^4}x + \frac{9h^4 + 6e^2h^2(\alpha - \varepsilon) + 2e^4\alpha\varepsilon}{9h^4};$$

➤ Parte 3.

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2}x - \frac{\alpha e^2}{3h^2}x^3 + \frac{e\alpha(e+h)}{h^2}x^2 + 1 + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha + \varepsilon\left[-\frac{\alpha e^4}{18h^4}x^6\right. \\ &+ \frac{e^3(e+h)\alpha}{3h^4}x^5 - \frac{5e^2(e+h)^2\alpha}{6h^4}x^4 + \frac{e(11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha))}{9h^4}x^3 \\ &- \frac{(e+h)(7e^3\alpha + 9e^2h\alpha + 5h^3\alpha + 3eh^2(2+5\alpha))}{6h^4}x^2 \\ &+ \frac{(e+h)^2(2e^3\alpha + h^3\alpha + 3eh^2(1+\alpha))}{3eh^4}x \\ &- \frac{2h^3e[11e^3\alpha + 27e^2h\alpha + 10h^3\alpha + 3eh^2(1+10\alpha)]}{18e^3h^4} \\ &+ \frac{e(-12e^4h^2 + 18e^3h^3 - 4e^6\alpha - 12e^4h^2\alpha + 36e^3h^3\alpha + 36e^2h^4\alpha)}{18e^3h^4} \\ &\left. + \frac{e(33eh^5\alpha + 25h^6\alpha - 18eh(e+h)^2h^2[1+\alpha] + 9eh^2(e+h)h^2[2+5\alpha] - 6h^5\alpha[e+h])}{18e^3h^4}\right]; \end{aligned}$$

Capítulo 4.

Resultados. Comparación entre diferentes aluminios.

4.1. MODELO CALCULADO CON MÉTODO DE EULER. COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Para comprobar la validez del modelo se ha procedido a calcular una solución de la velocidad en función de la profundidad utilizando métodos numéricos. Para ello, se ha empleado el método numérico de Euler, que se describe a continuación.

Se trata de un método de integración numérico que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias conociendo su valor inicial, como es el caso que se plantea en este proyecto. Son los conocidos como problemas de valor inicial, PVI:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y(x_i) &=?\end{aligned}$$

Se basa de forma general en la pendiente estimada de la función para extrapolar desde un valor anterior a un nuevo valor:

Nuevo valor = valor anterior + pendiente x tamaño de paso.

O bien:

$$y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h$$

De esta manera, la fórmula anterior se aplica paso a paso para encontrar un valor en el futuro y así ir trazando la trayectoria de la solución punto a punto. Cuanto mayor sea el número de pasos aplicados, mayor será la aproximación a la solución completa. La figura 4.1 muestra el procedimiento aplicado:

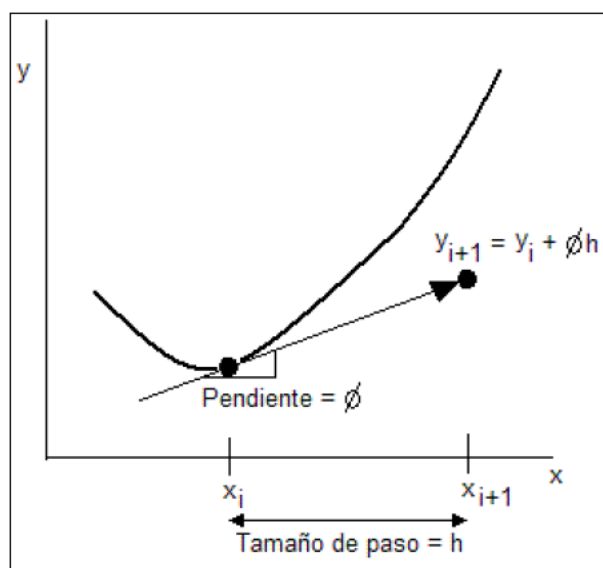


Figura 4. 1 - Predicción de un nuevo valor.

El método de Euler utiliza la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo. La primera derivada proporciona una estimación directa de la pendiente en x_i .

$$\phi = f(x, y)$$

$f(x_i, y_i)$, es la ecuación diferencial evaluada en x_i y y_i . Sustituyendo esta estimación de la pendiente en la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$$

Esta ecuación es la conocida como el método de Euler. En esta fórmula se predice un nuevo valor de y por medio de la pendiente que es igual a la primera derivada en el valor original de x , este nuevo valor habrá de extrapolarse en forma lineal sobre el tamaño de paso h .

A continuación se usa dicho método en las ecuaciones diferenciales planteadas en este proyecto:

➤ Parte 1:

La ecuación diferencial en esta parte era:

$$-\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w x^2 + \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2 = -\frac{dw}{dx};$$

Aplicando el método de Euler, se obtiene:

$$-\left(-\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w x^2 + \frac{\alpha e^2}{h^2} x^2\right) = \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x};$$

$$w_{i+1} = w_i - \Delta x \cdot \left(-\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w_i x_i^2 + \frac{\alpha e^2}{h^2} x_i^2\right)$$

$$\text{con } w_0 = 1$$

➤ Parte 2:

La ecuación diferencial en esta parte era:

$$\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w - \frac{\alpha e^2}{h^2} = \frac{dw}{dx};$$

Aplicando el método de Euler, se obtiene:

$$\left(\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w - \frac{\alpha e^2}{h^2}\right) = \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x}$$

$$w_{i+1} = w_i + \Delta x \cdot \left(\frac{\varepsilon e^2}{h^2} w_i + \frac{\alpha e^2}{h^2}\right)$$

➤ Parte 3:

La ecuación diferencial en esta parte era:

$$\frac{(e+h)^2}{h^2}\varepsilon w + \frac{e^2}{h^2}\varepsilon w x^2 - \frac{2e(e+h)}{h^2}\varepsilon w x - \frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} - \frac{\alpha e^2}{h^2}x^2 + \frac{2e\alpha(e+h)}{h^2}x = \frac{dw}{dx};$$

Aplicando el método de Euler, se obtiene:

$$\frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} = \frac{(e+h)^2}{h^2}\varepsilon w + \frac{e^2}{h^2}\varepsilon w x^2 - \frac{2e(e+h)}{h^2}\varepsilon w x - \frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} - \frac{\alpha e^2}{h^2}x^2 + \frac{2e\alpha(e+h)}{h^2}x$$

$$w_{i+1} = w_i + \Delta x \left[\frac{(e+h)^2}{h^2}\varepsilon w_i + \frac{e^2}{h^2}\varepsilon w_i x_i^2 - \frac{2e(e+h)}{h^2}\varepsilon w_i x_i - \frac{\alpha(e+h)^2}{h^2} - \frac{\alpha e^2}{h^2}x_i^2 + \frac{2e\alpha(e+h)}{h^2}x_i \right]$$

Representando la velocidad en función de x para un lanzamiento de ejemplo (con h=0,03 m y e=0,02 m, y v_i=190 m/s), el mismo ejemplo que con el método analítico, nos queda:

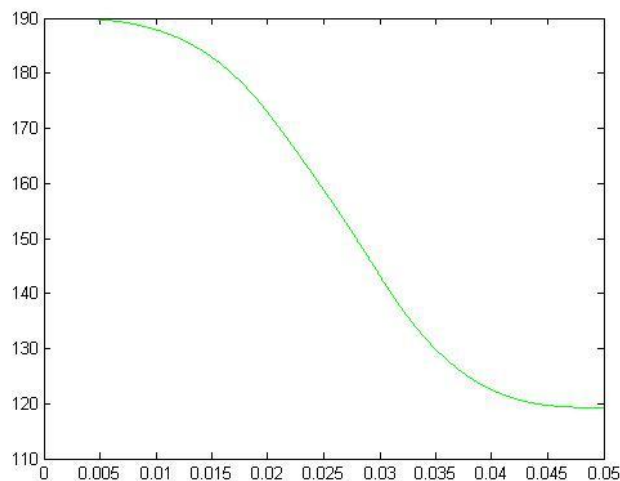


Figura 4.2 - Impacto a 190 m/s con el método de Euler.

Si se compara con la figura 3.5, que es la gráfica obtenida con el modelo analítico, se observa que son iguales y sólo difieren en el valor de la velocidad de salida del proyectil de la placa en las milésimas. Para el caso del modelo analítico, su valor es de 119,2858 m/s, y con el método de Euler, 119,2924 m/s.

La figura a continuación muestra la gráfica de la velocidad obtenida con el método de Euler (color verde), y las obtenidas con el modelo analítico de orden cero (azul) y total (rojo):

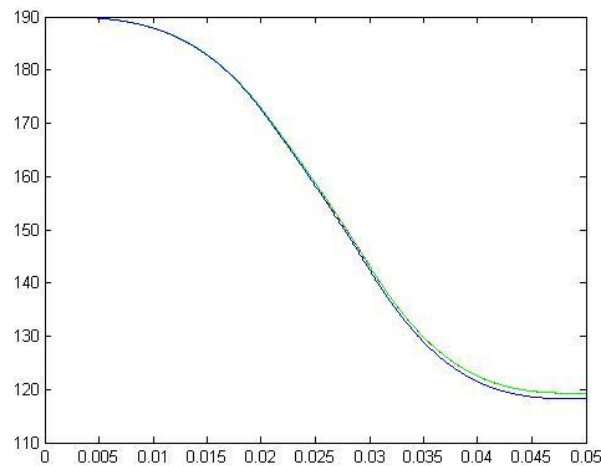


Figura 4.3 - Impacto a 190 m/s. Comparación entre modelos.

Como se puede observar, las gráficas coinciden prácticamente y sólo al final difieren algo. En cambio, si se va aumentando la velocidad inicial, se observa que la variación es algo mayor, pero sólo en la parte final del impacto y si solamente se tiene en cuenta el orden cero. En el siguiente gráfico se realiza el impacto a 600 m/s:

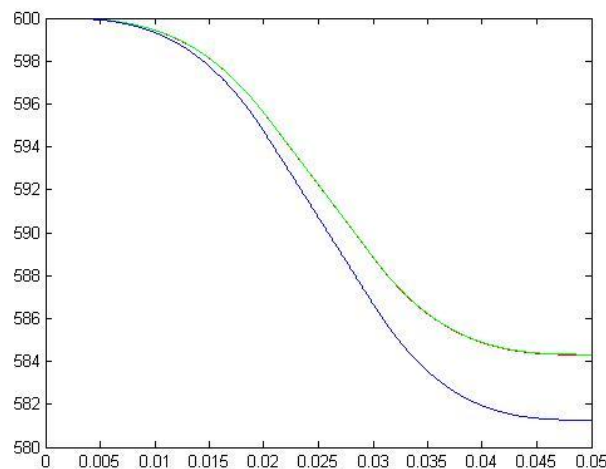


Figura 4.4 - Impacto a 600m/s. Comparación entre modelos.

Observando la gráfica, se percibe que la gráfica dada por el método de Euler y la dada por el modelo analítico completo, colores verde y rojo, coinciden perfectamente en todo el dominio. La gráfica de color azul es la parte de orden cero del modelo analítico, y por ello difiere con las otras dos gráficas.

La ventaja de resolver el impacto por un método numérico como el descrito, es que rápidamente se obtiene la solución numérica final o en algún punto concreto. En cambio, su mayor desventaja es que sólo tiene sentido numérico, es decir, no se puede describir el proceso físico en sí, algo que sí se consigue con el modelo analítico.

Además, en el modelo analítico es posible despejar la velocidad residual en función de parámetros geométricos únicamente, e incluso, se puede despejar el límite balístico v_{bl} en función de parámetros geométricos, consiguiendo una buena aproximación.

Para conseguir despejar dichos valores, se recurre al orden cero de la ecuación diferencial de la tercera parte:

$$w = -\frac{\alpha(e+h)^2}{h^2}x - \frac{\alpha e^2}{3h^2}x^3 + \frac{e\alpha(e+h)}{h^2}x^2 + 1 + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha;$$

Sustituyendo en esta ecuación el último punto, cuya coordenada es igual a $x = \frac{h+e}{e}$, y despejando de w la velocidad, se consigue despejar la velocidad en ese punto, es decir, la velocidad residual:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{h+e}{e}\right) &= \frac{v_{residual}^2}{v_{inicial}^2} = -\frac{\alpha(e+h)^3}{e \cdot h^2} - \frac{\alpha(e+h)^3}{e \cdot 3h^2} + \frac{\alpha(e+h)^3}{e \cdot h^2} + 1 + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha; \\ v_{residual}^2 &= v_{inicial}^2 \cdot \left[1 - \frac{(e+h)^3\alpha}{e3h^2} + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha\right]; \\ v_{residual} &= v_{inicial} \cdot \sqrt{1 - \frac{(e+h)^3\alpha}{e3h^2} + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha} \end{aligned}$$

Para obtener el límite balístico, se procede de la siguiente forma: se iguala la expresión de la velocidad residual anterior a cero, se obtiene un valor del parámetro alfa, y ese mismo valor se iguala a la expresión de alfa, en donde está presente la velocidad inicial. Se despeja la velocidad inicial, que en este caso es el límite balístico.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi e d^2 A \sigma_e}{2m v_i^2} \\ v_{residual} &= v_{inicial} \cdot \sqrt{1 - \frac{(e+h)^3\alpha}{e3h^2} + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha} = 0; \\ 1 - \frac{(e+h)^3\alpha}{e3h^2} + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e}\right)\alpha &= 0; \\ \alpha &= \frac{1}{\frac{(e+h)^3}{e3h^2} - \left(1 + \frac{2e^2}{3h^2} + \frac{h}{3e}\right)}; \\ \frac{1}{\frac{(e+h)^3}{e3h^2} - \left(1 + \frac{2e^2}{3h^2} + \frac{h}{3e}\right)} &= \frac{\pi e d^2 A \sigma_e}{2m v_i^2}; \\ v_{inicial} = v_{bl} &= \sqrt{\frac{\pi e d^2 A \sigma_e}{2m} \cdot \left[\frac{(e+h)^3}{e3h^2} - \left(1 + \frac{2e^2}{3h^2} + \frac{h}{3e}\right)\right]} \end{aligned}$$

Como se puede observar, se han obtenido las expresiones para la velocidad residual y para el límite balístico en función de parámetros geométricos, y todo a partir de la ecuación diferencial de orden cero del modelo analítico. Debido a esto último, hay un pequeño error en el resultado, pero como se ha visto anteriormente el error entre el orden cero y la solución total del modelo era mayor cuanto mayor era la velocidad inicial, por lo que a la hora de calcular el límite balístico no será tan grande el error ya que su valor no será demasiado grande, para espesores pequeños.

Decir, antes de entrar en los resultados con diferentes aleaciones, que tanto el método de Euler como el modelo analítico fueron implementados en Matlab para obtener las gráficas y sus valores. El código de dicho programa de Matlab se detalla en su correspondiente anexo.

4.2. ALEACIÓN DE ALUMINIO 6061-T651.

En este apartado, se estudia el impacto sobre una placa, de aluminio 6061-T651 de diferentes espesores, de un proyectil cónico de masa 0,197 kg y de longitud de la cabeza $h=0,03$ m. Se va a calcular la velocidad residual en función de la velocidad inicial de impacto así como el límite balístico para diferentes espesores con dos de los métodos explicados: con el modelo analítico calculado y despejando del orden cero de la ecuación diferencial de la última parte del impacto. Con el método de Euler ya se ha comprobado que coincide con el modelo analítico por lo que no se utiliza en este apartado de nuevo. También se debe recordar que el modelo es válido para espesores menores o iguales a la longitud de la cabeza del proyectil, $h=0,03$ m.

Antes de entrar en los cálculos, decir que las propiedades del aluminio son las siguientes:

Coeficiente de rozamiento.	Límite elástico.	Densidad.	Módulo de Young.	Coeficiente A	Coeficiente B
1/3	276 MPa	2710 kg/m ³	68,9 GPa	3,852	1,133

Se ha estudiado el impacto sobre placas de espesores 10, 12, 16, 20, 25 y 30 milímetros. Utilizando el modelo analítico, implementando en Matlab las ecuaciones que lo rigen, se han obtenido las velocidades residuales en cada caso de espesor y para varias velocidades iniciales diferentes. Todos estos resultados han sido representados en la figura 4.5.

Los impactos estudiados han sido:

ALUMINIO 6061-T651					
Espesor 20 mm		Espesor 25 mm		Espesor 30 mm	
Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual
0	0	0	0,0000	0	0,0000
100	0,0000	100	0,0000	160	0,0000
120	0,0000	120	0,0000	180	0,0000
140	0,0000	140	0,0000	200	0,0000
160	0,0000	160	0,0000	220	0,0000
180	0,0000	180	0,0000	240	0,0000
185	0,0000	200	0,0000	260	0,0000
185,5	0,0000	220	0,0000	260,2	0,0000
186	0,0000	225	0,0000	260,4	0,0000
186,5	0,0000	225,5	0,0000	260,6	0,0000
187	0,0000	226	0,0000	260,8	0,0000
187,84	0,0000	226,003	0,0000	260,25	0,0000
190	28,7188	230	43,0019	261,07	20,7881
220	115,1073	250	107,6597	300	150,6732
250	165,8098	280	166,5079	330	204,8721
300	235,1003	300	198,7355	360	251,1533
350	296,8202	350	269,2113	380	279,5852
400	354,9409	400	332,4564	400	306,7139
450	410,9923	450	391,9866	450	370,6829
ALUMINIO 6061-T651					
Espesor 12 mm		Espesor 16 mm		Espesor 10 mm	
Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual
0	0	0	0,0000	0	0,0000
10	0,0000	10	0,0000	10	0,0000
20	0,0000	30	0,0000	20	0,0000
30	0,0000	60	0,0000	30	0,0000
40	0,0000	90	0,0000	40	0,0000
50	0,0000	100	0,0000	50	0,0000
60	0,0000	110	0,0000	60	0,0000
70	0,0000	120	0,0000	70	0,0000
80	0,0000	130	0,0000	80	0,0000
90	0,0000	140	0,0000	90	0,0000
100	0,0000	150	0,0000	100,584	0,0000
119,1	0,0000	154,63	0,0000	101	9,1631
119,15	0,5841	155	10,7341	120	65,5374
120	14,2985	160	41,2437	160	124,61
140	73,6589	180	92,4541	180	149,4904
180	135,1953	200	127,2792	200	173,1168
220	185,3185	250	197,1157	250	229,2045
300	275,8848	300	257,9603	300	283,0451
350	329,7648	350	315,0664	350	335,7213
450	434,8227	450	424,0478	450	439,2504

Y representando la velocidad inicial frente a la velocidad residual en cada caso, se tiene:

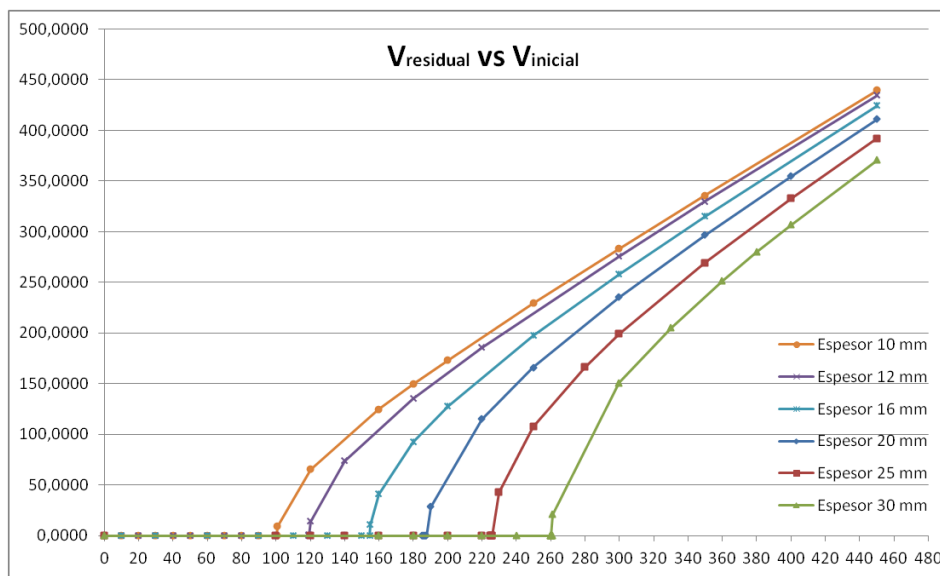


Figura 4. 5 - Velocidad residual vs inicial con el modelo analítico completo Al 6061-T651.

Como se puede observar, conforme se aumenta el espesor de la placa, ocurre lo mismo con el límite balístico, algo que está comprobado que ocurre así en la realidad. También se observa que una vez que se ha sobrepasado el límite balístico, la velocidad residual es mayor cuanto menor es el espesor de la placa.

A continuación, se ha calculado la velocidad residual para los mismos casos anteriores de impacto, pero en vez de utilizar el modelo analítico completo, sólo se ha utilizado la ecuación diferencial de orden cero y de ella se ha despejado la velocidad residual como bien se ha explicado al final del apartado 4.1.

Velocidad residual calculada despejando del orden cero.		
$v_{residual} = v_{inicial} \cdot \sqrt{1 - \frac{(e+h)^3 \alpha}{e^3 h^2} + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e} \right) \alpha}$		
espesor	0,01	m
h	0,03	m
A	3,852	
diámetro del proyectil	0,02	m
masa	0,197	Kg
Límite elástico	276000000	Pa

Aplicando esta fórmula a los casos de impacto, y representando las velocidades iniciales frente a las velocidades residuales se obtiene:

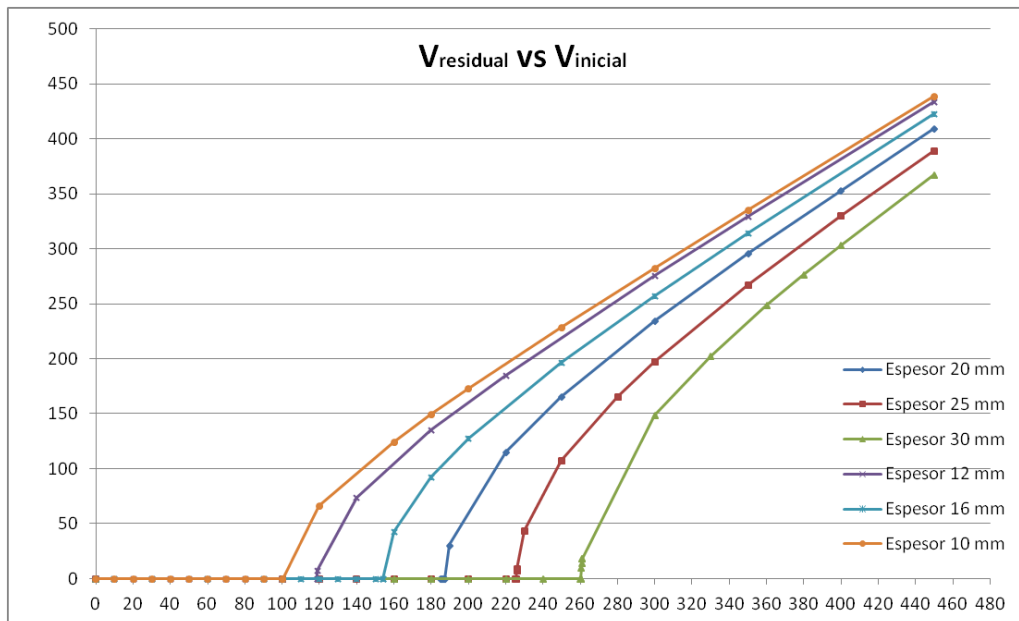


Figura 4. 6 - Velocidad residual vs inicial despejando el orden cero del modelo analítico Al 6061-T651.

Como puede verse, ocurre igual que utilizando el modelo analítico completo. El límite balístico aumenta conforme lo hace espesor, y la velocidad residual es mayor cuanto menor sea el espesor.

Para comprobar que ambos métodos coinciden en sus resultados, se ha procedido a representar para cada espesor la gráfica que corresponde a cada método utilizado para calcular la velocidad residual. Se han utilizado los mismos casos representados en las figuras 4.5 y 4.6.

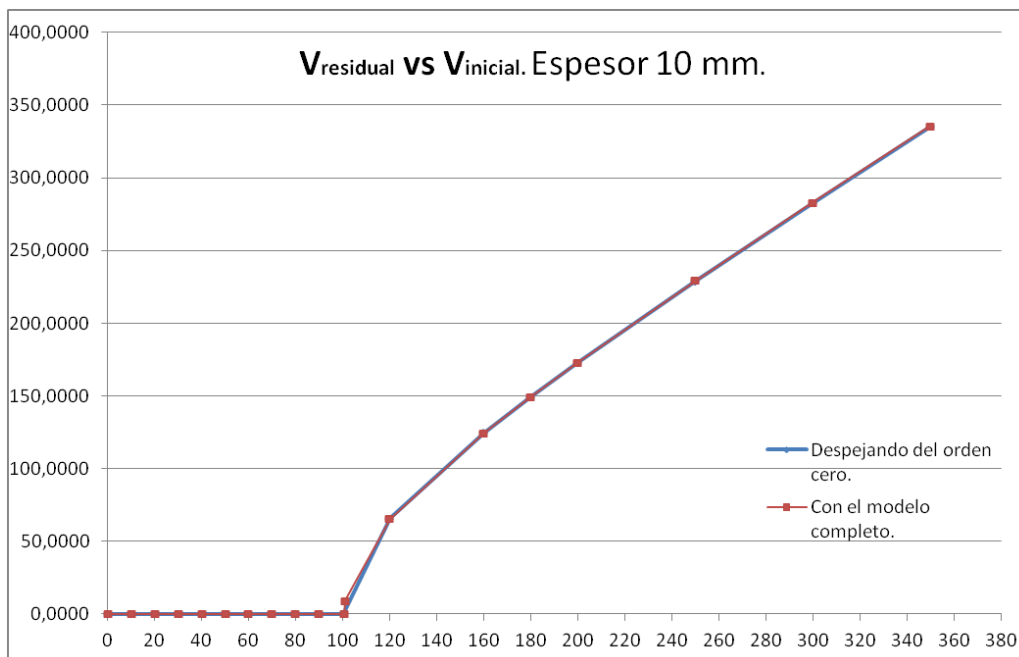


Figura 4. 7 - Velocidad residual vs inicial para espesor 10 mm Al 6061-T651.

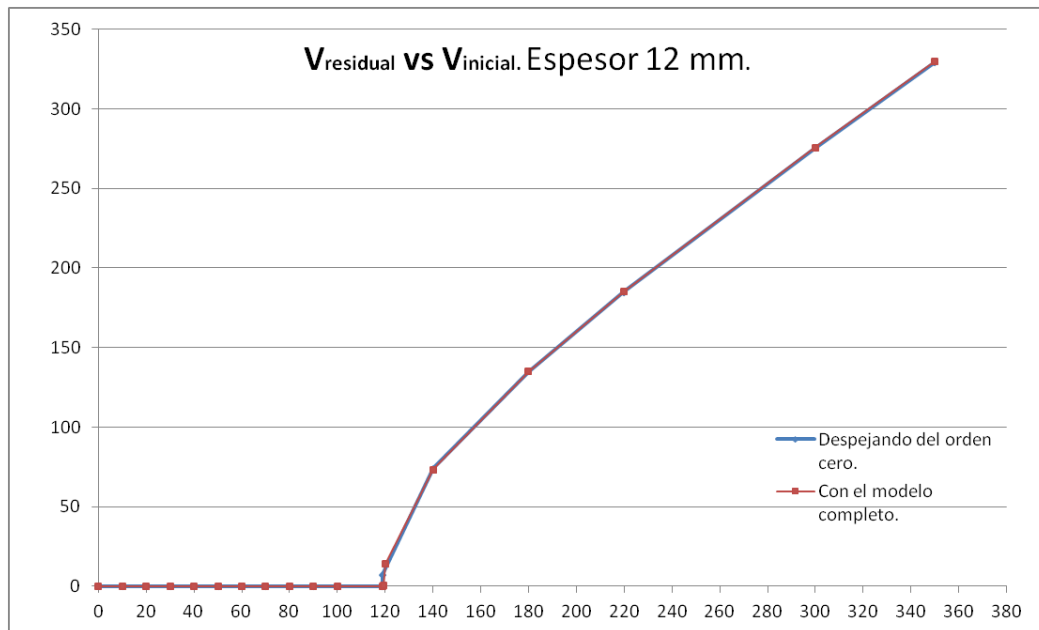


Figura 4. 8 - Velocidad residual vs inicial para espesor 12 mm Al 6061-T651.

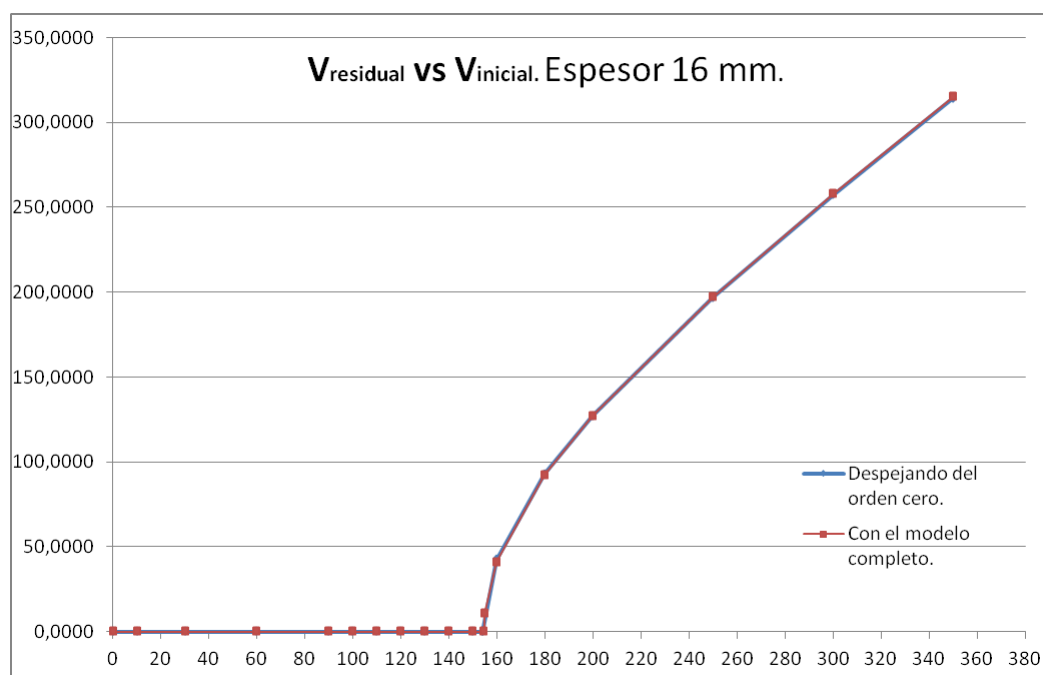


Figura 4. 9 - Velocidad residual vs inicial para espesor 16 mm Al 6061-T651.

Como se puede comprobar en las gráficas, para los espesores de 10, 12 y 16 milímetros, los resultados obtenidos con el modelo analítico completo y despejando únicamente del orden cero son prácticamente idénticos. Con lo cual, se podría decir que la parte de orden uno del modelo no influye prácticamente nada al menos en la última parte del impacto, cuando el proyectil penetra totalmente la placa.

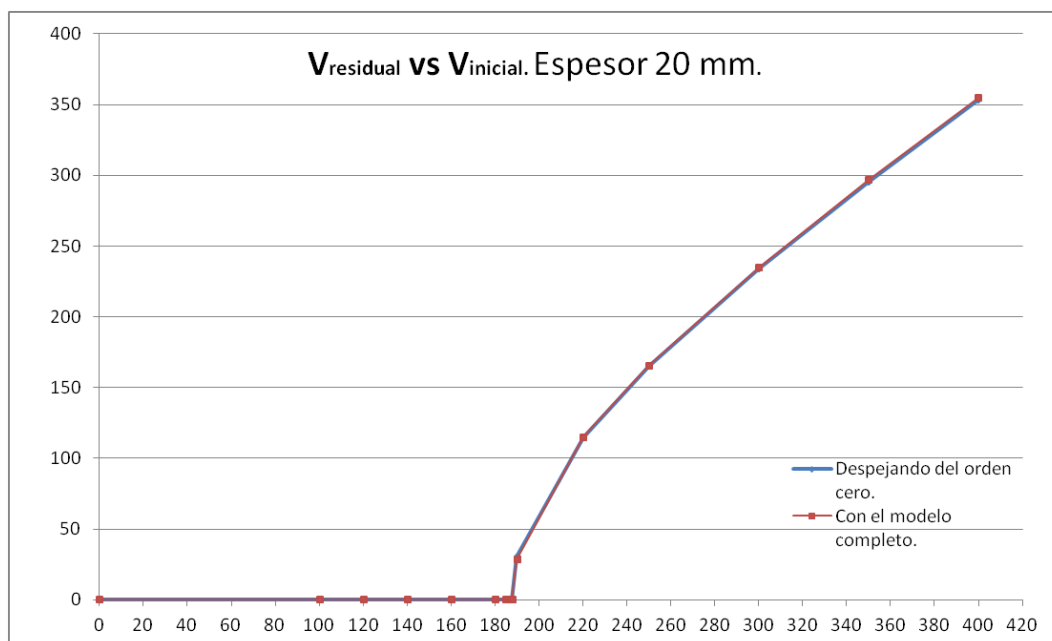


Figura 4. 10 - Velocidad residual vs inicial para espesor 20 mm Al 6061-T651.

Para el caso del espesor de 20 milímetros, igualmente se observa la coincidencia de los resultados por ambos métodos de cálculo.

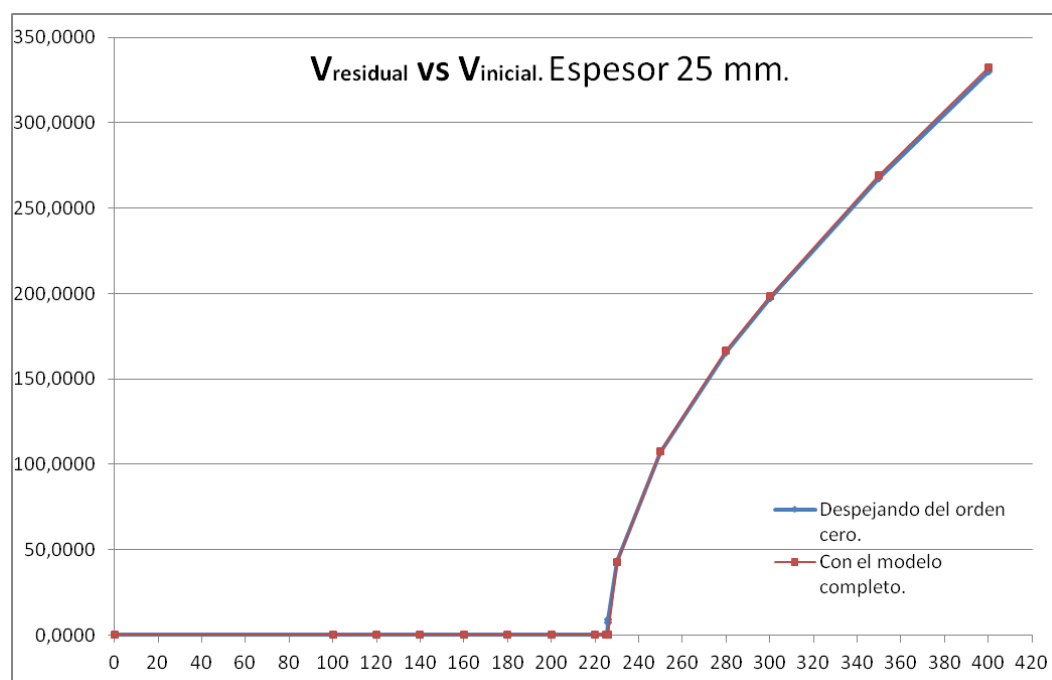


Figura 4. 11 - Velocidad residual vs inicial para espesor 25 mm Al 6061-T651.

En cambio, para la placa de 25 milímetros de espesor, se observan pequeñas diferencias cerca del valor del límite balístico. Si se calcula a partir del modelo analítico completo, el límite balístico tiene un valor mayor que el calculado despejando del orden cero, por lo que si se utiliza la fórmula despejada de dicho orden se obtendrá un valor más seguro del límite balístico.

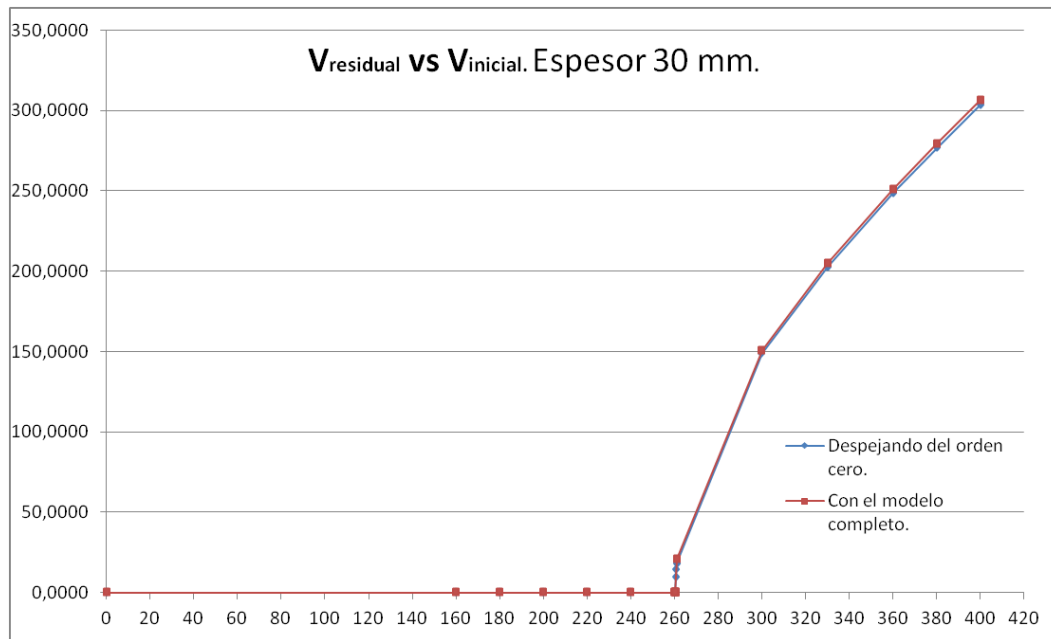


Figura 4. 12 - Velocidad residual vs inicial para espesor 30 mm Al 6061-T651.

Para el caso de la placa de 30 milímetros de espesor ocurre igual que con la misma de 25 milímetros de espesor. Pero se debe decir que las diferencias de resultados son de unos pocos m/s, por lo que no son grandes diferencias respecto a la velocidad inicial de impacto, que se sitúa en torno a los 260-270 m/s. Igualmente, el valor obtenido despejando del orden cero es más seguro que el calculado con el modelo analítico completo.

Por último, se ha utilizado la fórmula del límite balístico despejada en el punto 4.1 para calcular el mismo en cada uno de los espesores utilizados. Como su valor sólo depende de factores geométricos, y el único factor que varía es el espesor de la placa, se calcula para todos los utilizados en este mismo apartado.

Límite balístico calculado despejando del orden cero		
$v_{inicial} = v_{bl} = \sqrt{\frac{\pi e d^2 A \sigma_e}{2m} \cdot \left[\frac{(e+h)^3}{e3h^2} - \left(1 + \frac{2e^2}{3h^2} + \frac{h}{3e} \right) \right]}$		
espesor	0,021	m
h	0,03	m
A	3,852	
diámetro del proyectil	0,02	m
masa	0,197	Kg
Límite elástico	276000000	Pa

En la tabla siguiente, se ven los límites balísticos para cada uno de los espesores, calculados con la fórmula anteriormente mencionada y comparándolos con el valor sacado del modelo analítico completo.

ALUMINIO 6061-T651		
L.Balístico despejando del orden cero	Espesor	L.Balístico con el modelo completo
100,235	0,010	100,585
118,77	0,012	119,14
154,2441	0,016	154,632
187,522	0,020	187,842
225,876	0,025	226,004
260,42	0,030	260,251

Figura 4. 13 - Límites balísticos para Al 6061-T651.

Representado los valores calculados a partir de la fórmula y a partir del modelo analítico completo, en función del espesor, se obtiene la siguiente gráfica:

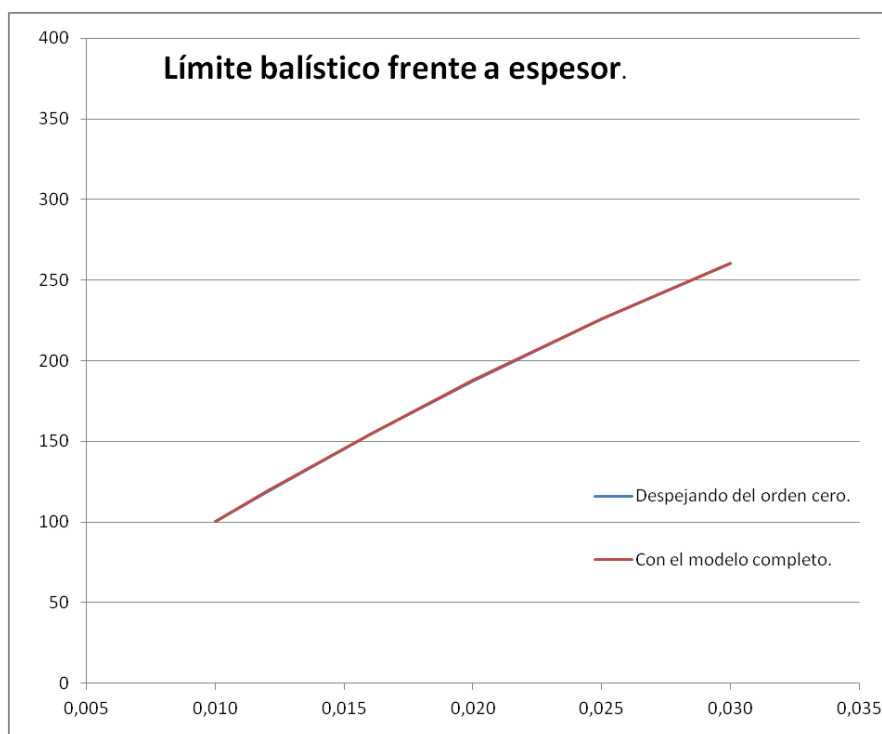


Figura 4. 14 - Límite balístico en función del espesor Al 6061-T651.

4.3. ALEACIÓN DE ALUMINIO 7075-T651.

En este apartado, se estudia el impacto sobre una placa, de aluminio 7075-T651 de diferentes espesores, de un proyectil cónico de masa 0,197 kg y de $h=0,03$ m. Se va a calcular, como en el apartado anterior, la velocidad residual en función de la velocidad inicial de impacto así como el límite balístico para diferentes espesores con dos de los métodos explicados: con el modelo analítico calculado y despejando del orden cero de la ecuación diferencial de la última parte del impacto.

Antes de entrar en los cálculos, las propiedades del aluminio son las siguientes:

Coeficiente de rozamiento.	Límite elástico.	Densidad.	Módulo de Young.	Coeficiente A	Coeficiente B
1/3	448 MPa	2710 kg/m ³	73,1 GPa	3,6011	1,068

Se ha estudiado el impacto sobre placas de espesores 10, 12, 16, 20, 25 y 30 milímetros, igual que en el apartado anterior, y representando la velocidad inicial frente a la velocidad residual para cada caso se obtiene:

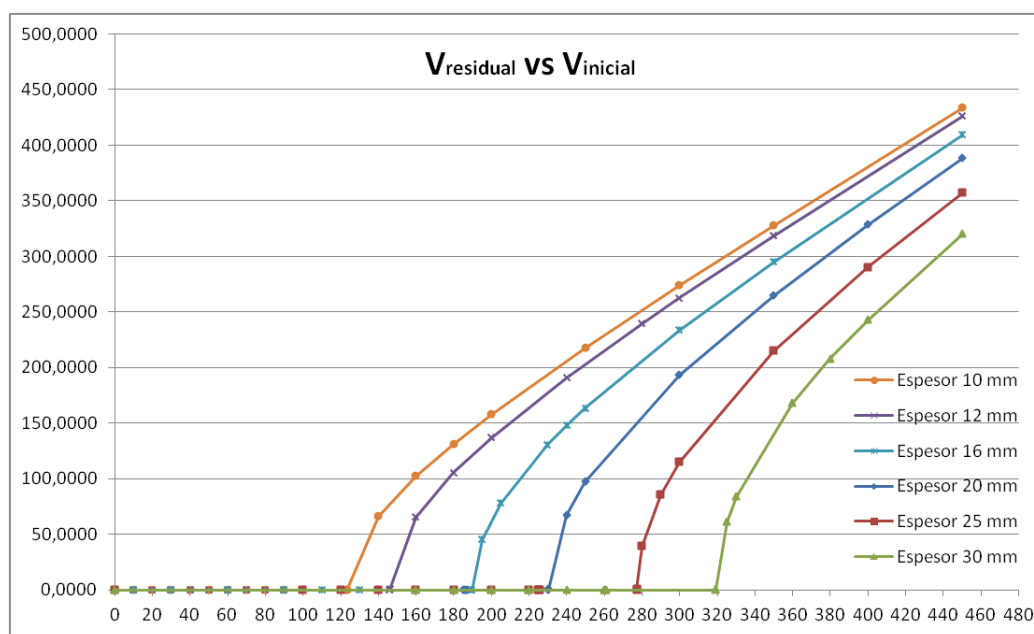


Figura 4. 15 - Velocidad residual vs inicial con el modelo analítico completo Al 7075-T651.

Comparando la gráfica de esta aleación con la de la aleación 6061-T651, se observa que está más desplazada a la derecha, es decir, que los límites balísticos son superiores. Esto se traduce en que esta segunda aleación estudiada es más segura frente a impactos que la del capítulo anterior.

Ahora se van a estudiar los mismos impactos pero calculando la velocidad residual despejando de la ecuación diferencial de orden cero de la última parte del impacto, igual que en el capítulo anterior.

Velocidad residual calculada despejando del orden cero.		
$v_{residual} = v_{inicial} \cdot \sqrt{1 - \frac{(e+h)^3 \alpha}{e3h^2} + \frac{1}{3} \left(3 + \frac{2e^2}{h^2} + \frac{h}{e} \right) \alpha}$		
espesor	0,01	m
h	0,03	m
A	3,852	
diámetro del proyectil	0,02	m
masa	0,197	Kg
Límite elástico	276000000	Pa

Representando todos los resultados gráficamente:

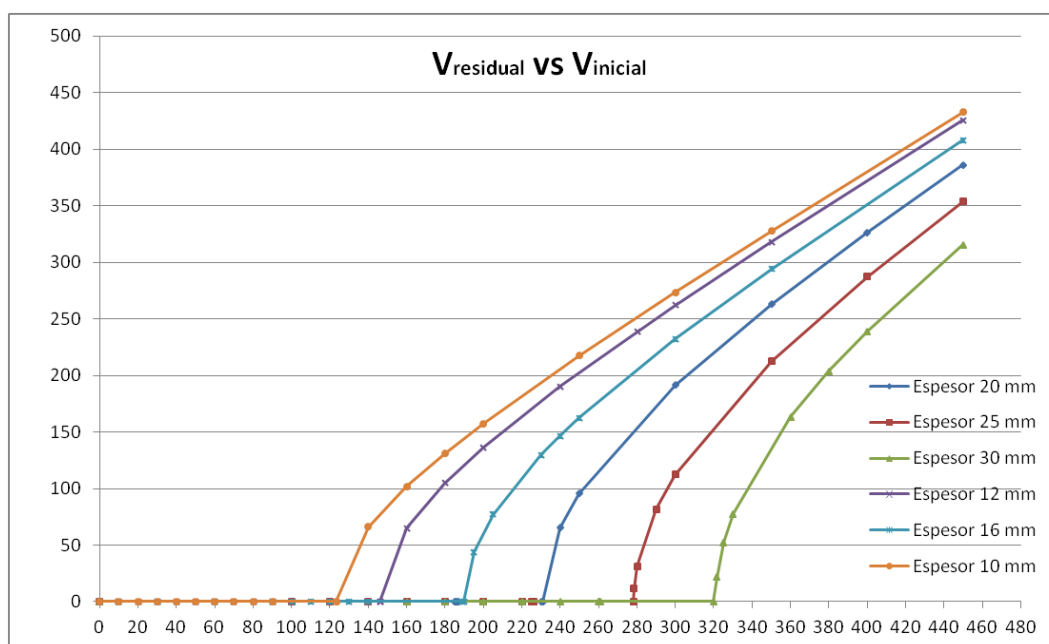


Figura 4. 16 - Velocidad residual vs inicial despejando del orden cero Al 7075-T651.

A continuación, igual que para la aleación del capítulo anterior, se comparan los resultados obtenidos utilizando el modelo analítico completo y sólo mediante el orden cero de la última parte del impacto.

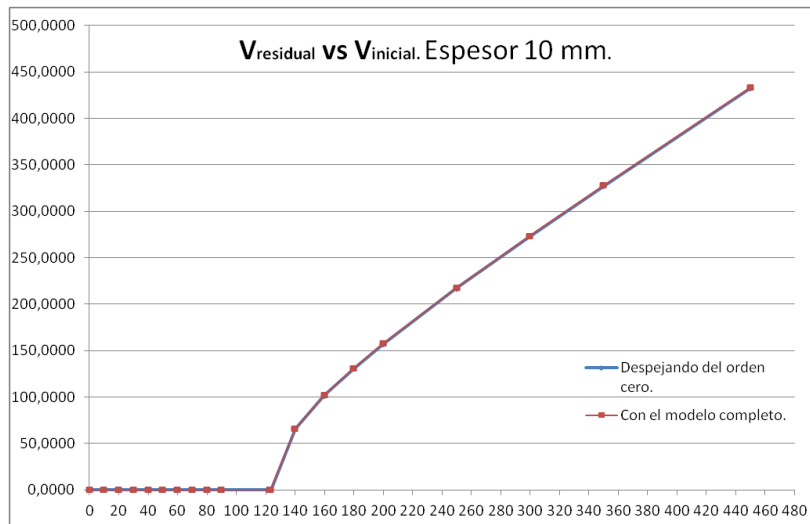


Figura 4. 17- Velocidad residual vs inicial para espesor 10 mm Al 7075-T651.

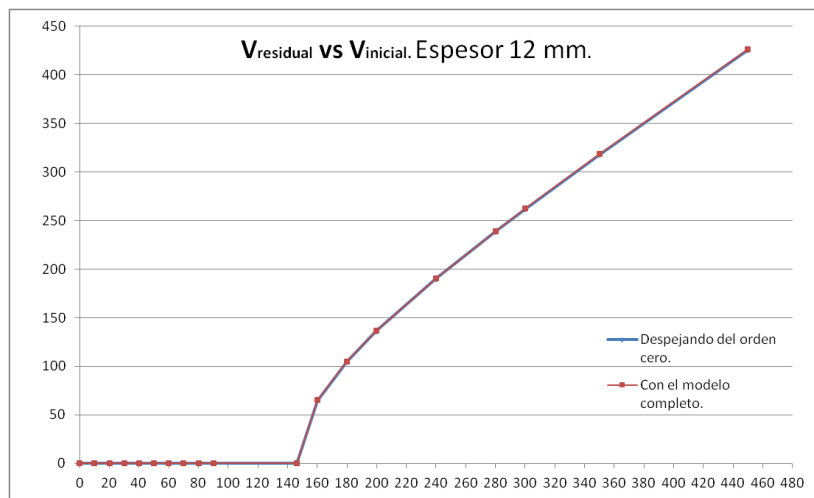


Figura 4. 18 - Velocidad residual vs inicial para espesor 12 mm Al 7075-T651.

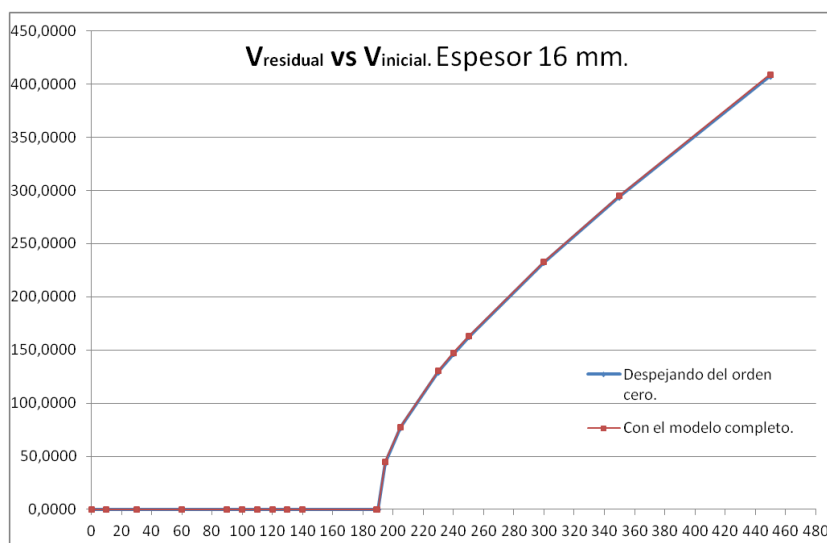


Figura 4. 19 - Velocidad residual vs inicial para espesor 16 mm Al 7075-T651.

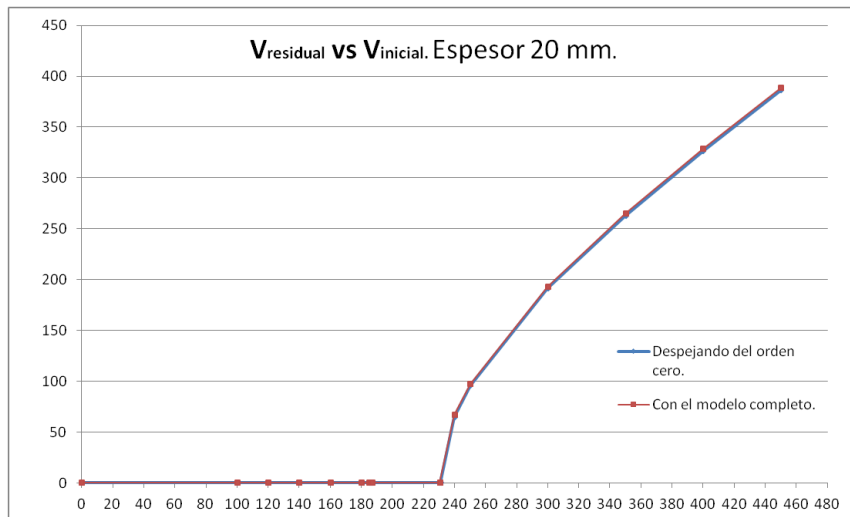


Figura 4. 20 - Velocidad residual vs inicial para espesor 20 mm Al 7075-T651.

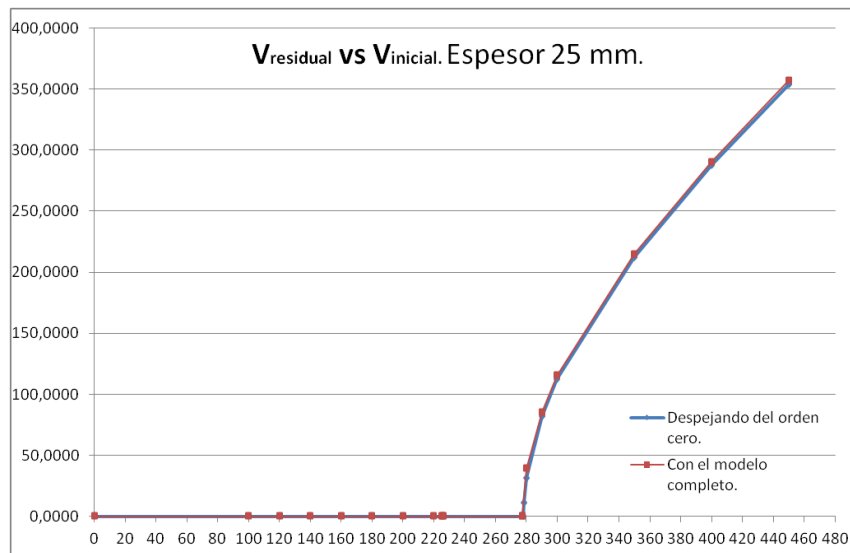


Figura 4. 21 - Velocidad residual vs inicial para espesor 25 mm Al 7075-T651.

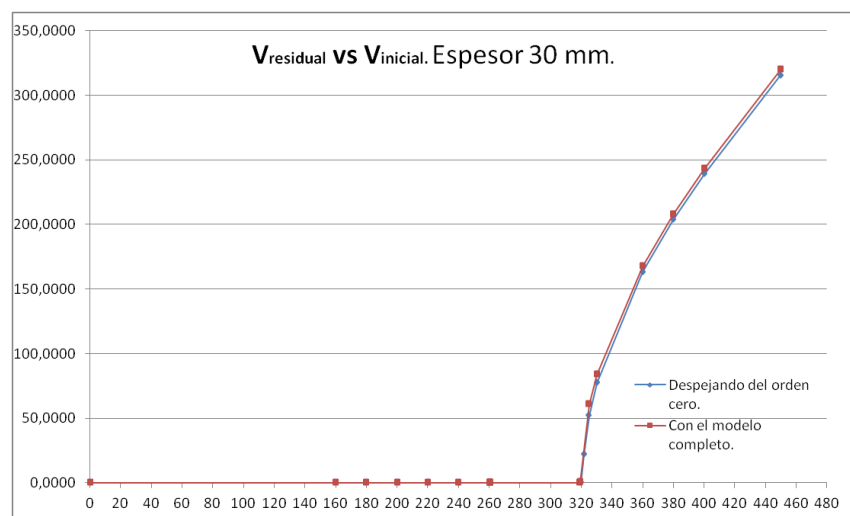


Figura 4. 22 - Velocidad residual vs inicial para espesor 30 mm Al 7075-T651.

Como se puede observar en las gráficas, los resultados coinciden prácticamente en todos los casos, salvo para los impactos en placas de espesor 30 milímetros, igual que ocurría con la aleación del anterior apartado. Como ya se dijo, esto se puede deber a que es el último valor para el espesor válido del modelo analítico, y por ello puede haber mayor discrepancia de resultados, aunque aun así, son muy parecidos.

A continuación se comparan los valores de los límites balísticos sacados del modelo analítico completo y los sacados despejando del orden cero, al igual que se comparó en la aleación anterior.

Los resultados obtenidos han sido:

ALUMINIO 7075-T651		
L.Balístico despejando del orden cero	Espesor	L.Balístico con el modelo completo
123,474	0,010	123,39
146,305	0,012	146,166
190,006	0,016	189,7
230,999	0,020	230,451
278,246	0,025	277,291
320,796	0,030	319,339

Figura 4. 23 - Límites balísticos para Al 7075-T651.

Representando gráficamente:

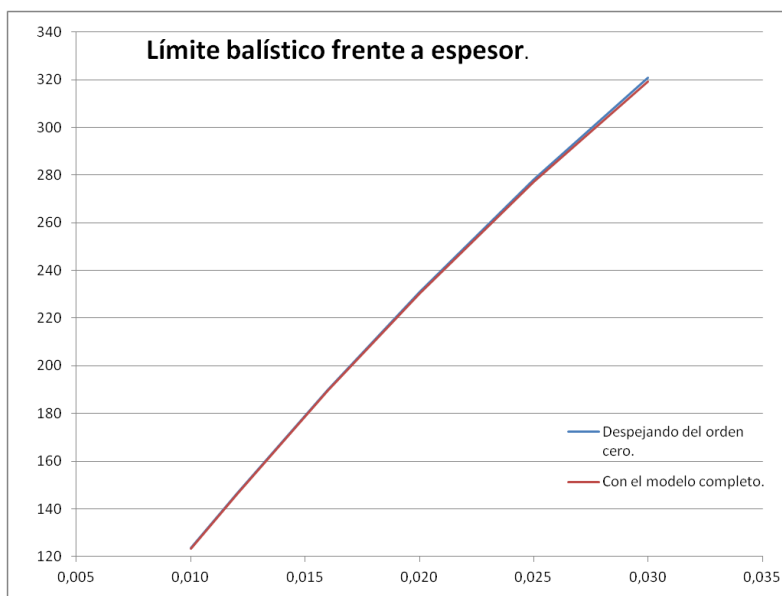


Figura 4. 24 - Límite balístico en función del espesor Al 7075-T651.

Como se puede apreciar en el gráfico, los valores son prácticamente iguales, sólo se diferencian en algunas décimas entre ambos métodos.

4.4. ALEACIÓN DE ALUMINIO 5083-H116.

Como ya se ha observado en las aleaciones anteriores, los resultados obtenidos tanto con el modelo analítico completo como utilizando únicamente el orden cero de la ecuación diferencial de la última parte del modelo son prácticamente idénticos.

Las propiedades de la aleación 5083-H116 son las siguientes:

Coeficiente de rozamiento.	Límite elástico.	Densidad.	Módulo de Young.	Coeficiente A	Coeficiente B
0,3	347 MPa	2700 kg/m ³	70 GPa	3,71	1,133

En este apartado se va a proceder a hacer lo mismo que en los anteriores salvo que se tiene una referencia de resultados de un estudio experimental, [24]. Los resultados obtenidos en ese estudio fueron:

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL					
ALUMINIO 5083-H116					
Espesor 20 mm		Espesor 25 mm		Espesor 30 mm	
Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual
230,4	0,0	249,6	0,0	309,7	0,0
245,9	0,0	263,6	52,8	319	73,0
252	33,9	286,4	126,4	330,7	143,9
260,7	74,1	303	160,8	352,1	167,3
303,3	175,6	357,3	251,3	372,9	191,0
364,9	275,6				

Representados gráficamente:

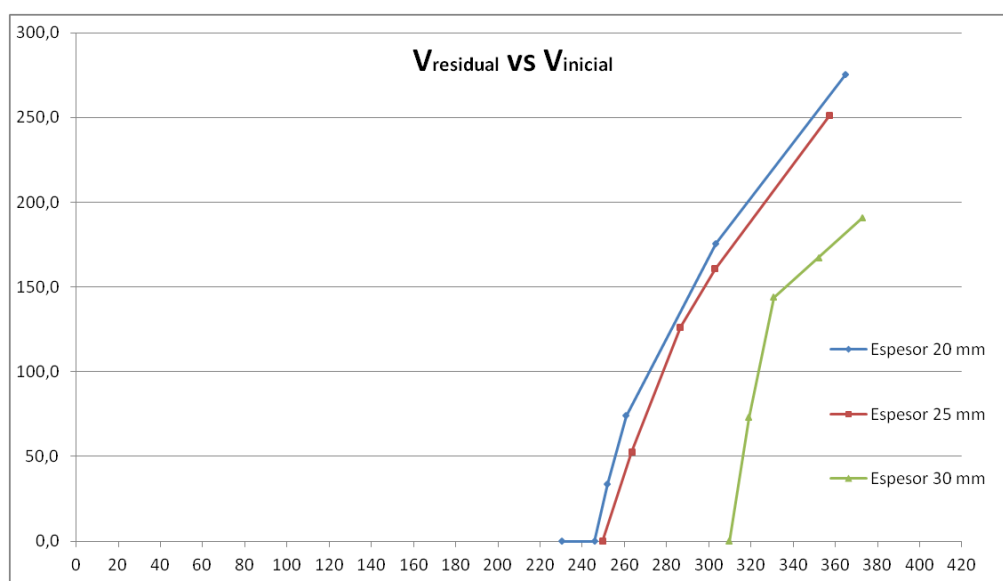


Figura 4. 25 – Velocidad residual vs velocidad inicial experimental Al 5083-H116.

Para comparar con el modelo analítico calculado en este proyecto, se escoge el modelo completo para calcular las velocidades residuales en los mismos casos de impacto que el estudio experimental, obteniéndose los siguientes resultados:

RESULTADOS DEL MODELO ANALÍTICO					
ALUMINIO 5083-H116					
Espesor 20 mm		Espesor 25 mm		Espesor 30 mm	
Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual	Vinicial	Vresidual
205,83	0,0000	247,65	0,0000	285,19	0,0000
215	62,4246	249	26,0391	295	76,1740
230,4	104,0451	249,6	31,3302	309,7	121,9222
245,9	135,2137	263,6	90,9498	319	144,3123
252	146,1187	286,4	144,8998	330,7	169,0439
260,7	160,7989	303	175,8511	352,1	208,5016
303,3	223,8879	357,3	259,4307	372,9	242,5844
364,9	302,8257				

Representados gráficamente:

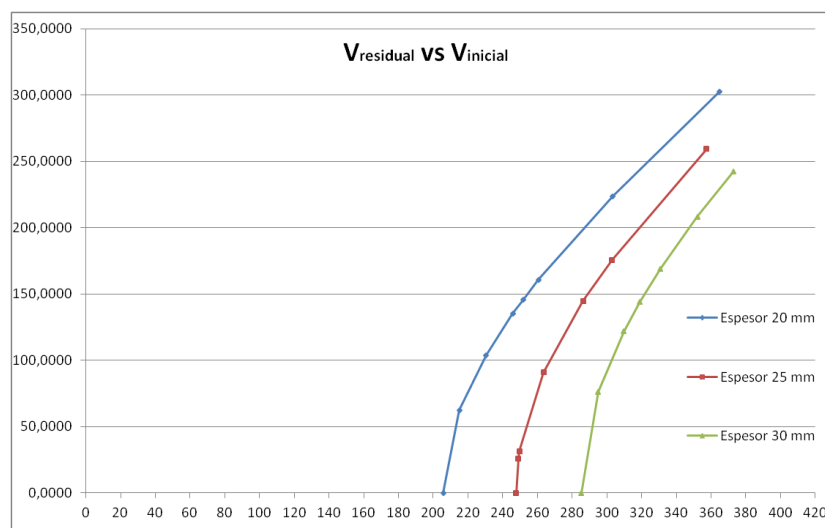


Figura 4. 26 - Velocidad residual vs velocidad inicial con el modelo analítico Al 5083-H116.

Comparando los resultados experimentales y los obtenidos con el modelo analítico, se observan diferencias considerables, salvo para el espesor de 25 milímetros, que son bastante cercanos ambos. Estas diferencias pueden deberse a que en el estudio experimental la velocidad inicial se mide un poco más lejos que en el caso del modelo analítico calculado, en el que se mide justo en el instante antes de penetrar la placa, y durante ese espacio recorrido podría reducirse la velocidad. Con lo cual, las velocidades iniciales justo antes de penetrar la placa en el estudio experimental serían más pequeñas que las estudiadas. Todo esto se traduce en que el límite balístico del estudio experimental sería menor, acercándose al modelo analítico calculado.

A continuación se comparan ambos métodos para cada espesor diferente:

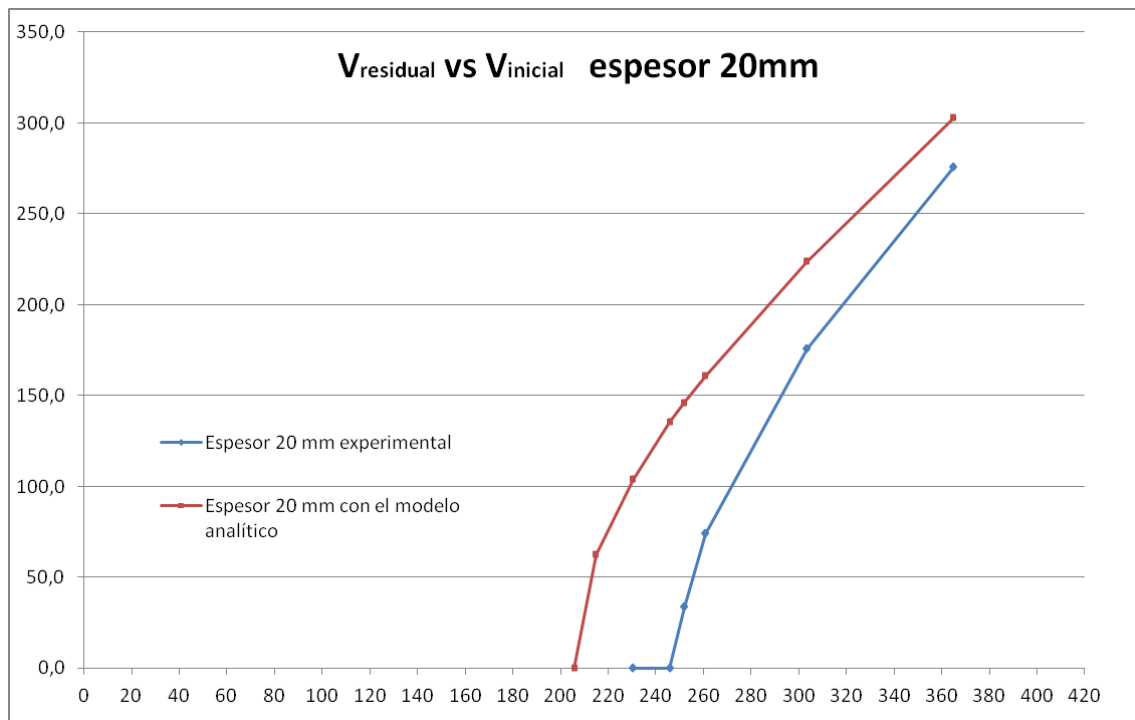


Figura 4. 27 - Velocidad residual vs velocidad inicial espesor 20mm Al 5083-H116.

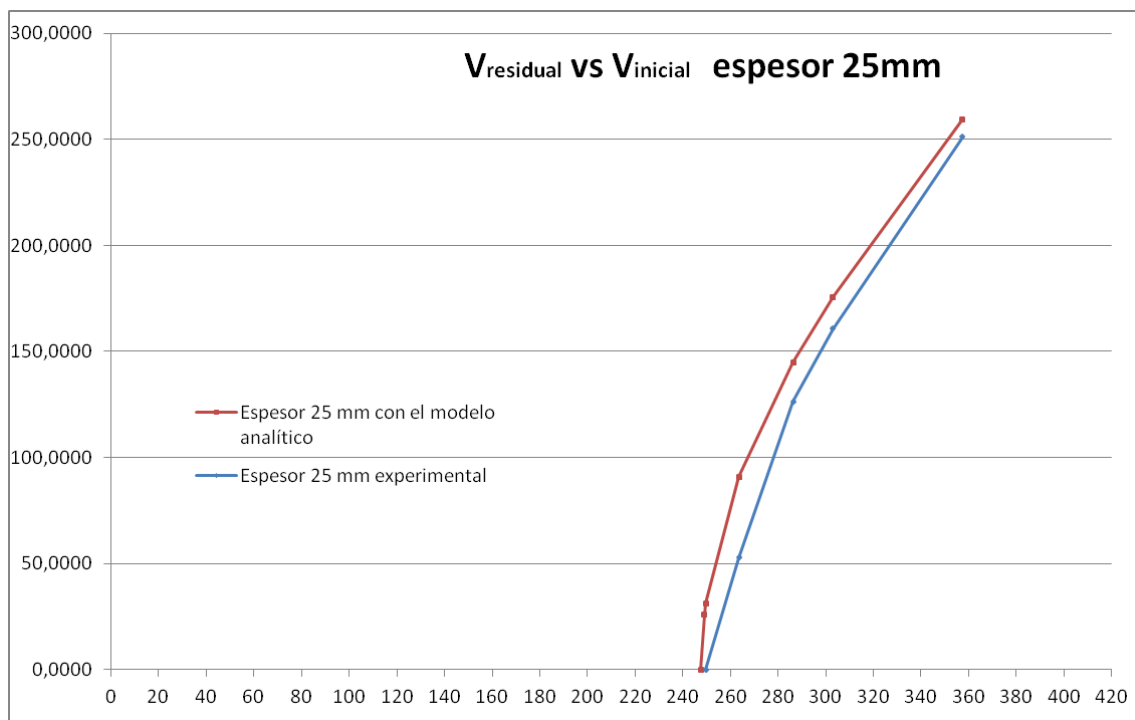


Figura 4. 28 - Velocidad residual vs velocidad inicial espesor 25mm Al 5083-H116.

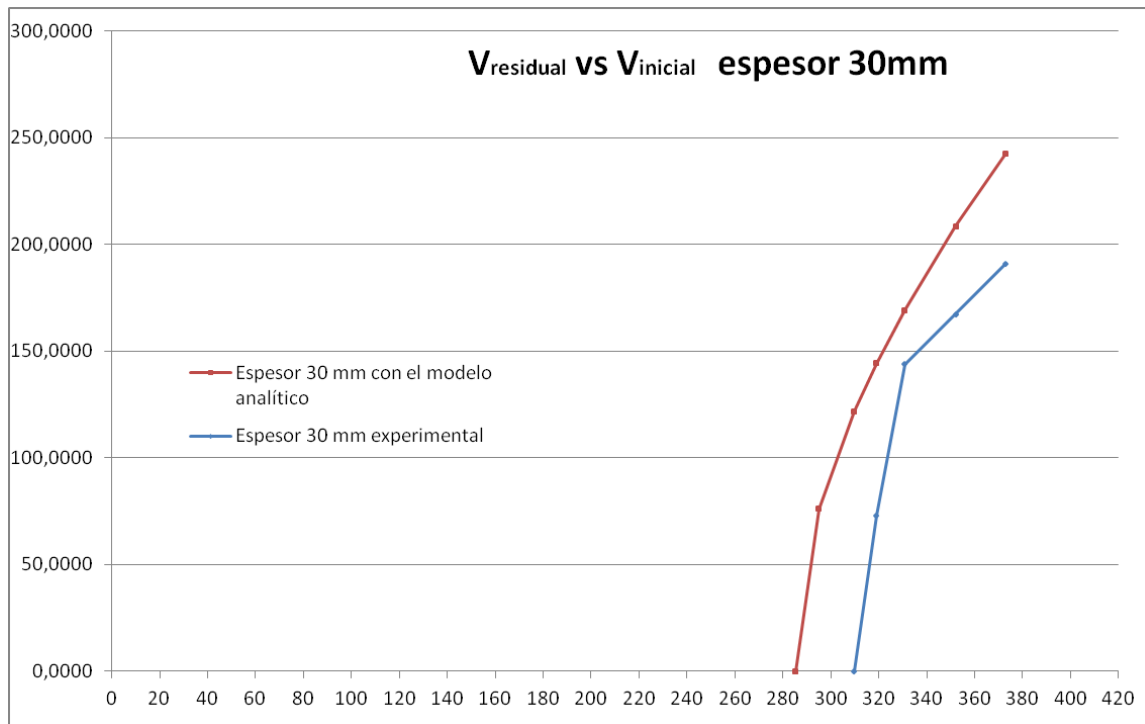


Figura 4. 29- Velocidad residual vs velocidad inicial espesor 30mm Al 5083-H116.

Como se puede ver, hay diferencias en los tres espesores, aunque menores para 25 milímetros, como ya se dijo antes. Aun así, la pendiente de las gráficas son muy parecidas, es decir, el crecimiento de la velocidad residual respecto a la velocidad inicial es parecido en ambos casos.

Mencionar que estas diferencias, aparte de poder deberse a la medición de la velocidad inicial en un punto más alejado de la placa que en el modelo analítico, también se deben a que el modelo calculado en este proyecto se ha despreciado el rozamiento.

Si se tuviera que utilizar uno de los dos métodos para realizar un estudio sobre la seguridad frente a un impacto de una placa de aleación de aluminio, se debería elegir en principio el modelo analítico calculado, puesto que devuelve unos límites balísticos menores, más conservadores. Aunque para estar seguros sobre qué método elegir se deberían realizar estudios experimentales para las otras dos aleaciones utilizadas en este proyecto y comparar en ellos los resultados obtenidos experimentalmente y con el modelo analítico calculado.

Capítulo 5.

Conclusiones y trabajos futuros.

5.1. CONCLUSIONES.

Las conclusiones más importantes que se pueden obtener del modelo analítico calculado en este proyecto son las siguientes:

El modelo que se ha escogido como base da resultados bastante fiables, aunque como se ha visto comparándolo con un estudio experimental haya diferencias, pero siempre utilizando este modelo se estará en el lado de la seguridad frente al impacto.

Respecto a los métodos de cálculo utilizados se debe decir que el método de las perturbaciones regulares utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales da una solución bastante exacta comparando con la solución obtenida con el método de Euler.

Además, sólo teniendo en cuenta el orden cero de la ecuación diferencial de la última parte del impacto se ha obtenido de una forma rápida y cómoda una expresión cerrada tanto para el límite balístico como para la velocidad residual del impacto que se estudie, y con un error de aproximadamente el 10%, pero siempre obteniéndose resultados más seguros.

Con todo lo anteriormente expuesto, se puede decir que se ha obtenido un modelo analítico bastante útil para ensayar impactos sobre placas, en concreto de aleaciones de aluminio, obteniendo resultados bastantes seguros y precisos.

5.2. TRABAJOS FUTUROS.

Como futuros trabajos a realizar sobre este proyecto, se distinguen tres a continuación:

- Se podrían considerar más tipos diferentes de proyectil, obteniéndose en su caso la correspondiente ecuación de la cabeza de los mismos. De esta manera, se abarcaría un mayor número de proyectiles y por lo tanto un mayor número de ensayos experimentales.
- Por otro lado, se podrían estudiar más espesores de placa y materiales metálicos diferentes a las aleaciones de aluminio, e incluso, intentar adaptar el modelo para poder usarlo con materiales compuestos, muy comunes en las industrias naval y aeronáutica.
- Por último, se podrían realizar futuros modelos considerando el rozamiento entre el proyectil y la placa, obteniendo así mayor precisión en los resultados.

Capítulo 6.

Referencias.

6.1. REFERENCIAS.

- [1] Q.M. Li, X.W. Chen. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics. *Int J Impact Eng* 2002; 27:619-637.
- [2] Q.M. Li, H.J. Weng, X.W. Chen. A modified model for the penetration into moderately thick plates by a rigid, sharp-nosed projectile. *Int J Impact Eng* 2004; 30:193-204.
- [3] R. M. Brach. *Mechanical Impact Dynamics*. John Wiley, 1991.
- [4] J. Martí y J. M. Goicolea. Impactos y grandes deformaciones. *Revista de la Sociedad Nuclear Española*, 68:23-27.
- [5] Woodward R. Let aluminium take the strain. *Proceedings of the International Conference on Light Metals in Naval Architecture*, Southampton, UK, 1996.
- [6] Backman EM, Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *Int J Eng Sci* 1978;16:1-99.
- [7] Corbett GG, Reid SR, Johnson W. impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: a review. *Int J Impact Eng* 1996;18:141-230.
- [8] Zukas JA, et al. *Impact dynamics*. New York: Wiley; 1982.
- [9] Johnson W. *Impact strength of materials*. London: Edward Arnold; 1972.
- [10] Marom I, Bodner SR. Projectile perforation of multi-layered beams. *Int J Mech Sci* 1979; 21:489-504.
- [11] Radin J, Goldsmith W. Normal projectile penetration and perforation of layered targets. *Int J Impact Eng* 1988; 7:229-59.
- [12] Woodward RL, Cimpoeu SJ. A study of the perforation of aluminium laminate targets. *Int J Impact Eng* 1998; 21:117-31.
- [13] Roisman IV, Weber K, Yarin AL, Hohler V, Rubin MB. Oblique penetration of a rigid projectile into a thick elastic-plastic target: theory and experiment. *Int J Impact Eng* 1999; 22:707-26.
- [14] Roeder BA, Sun CT. Dynamic penetration of alumina/aluminium laminates: experiments and modeling. *Int J Impact Eng* 2001; 25:169-85.
- [15] Goldsmith W, Finnegan SA. Penetration and perforation process in metal targets and above ballistic limits. *Int J Mech Sci* 1971; 13:843-66.
- [16] Levy N, Goldsmith W. Normal impact and perforation of thin plates by hemispherical tipped projectiles. *Int J Impact Eng* 1984; 2:299-324.

- [17] Gupta NK, Ansari R, Gupta SK. Normal impact of ogive-nosed projectiles on thin plates. *Int J Impact Eng* 2001; 25:641-60.
- [18] Landkof B, Goldsmith W. Petalling of thin metallic plates during penetration by cylindro-conical projectiles. *Int J Solids Struct* 1983; 21:245-66.
- [19] Wierzbicki T. Petalling of plates under explosive and impact loading. *Int J Impact Eng* 1999; 22:935-54.
- [20] Piekutowski AJ, Forrestal MJ, Poormon KL, Warren TL. Perforation of aluminium plates with ogive-nose steel rods at normal and oblique impacts. *Int J Impact Eng* 1996; 18:877-87.
- [21] Forrestal MJ, Rosenberg Z, Luk VK, Bless SJ. Perforation of aluminium plates with conical-nosed rods. *ASME J Appl Mech* 1987; 109:230-2.
- [22] Rosenberg Z, Forrestal MJ. Perforation of aluminium plates with conical-nosed rods – additional data and discussion. *ASME J Appl Mech* 1988; 110:236-8.
- [23] Forrestal MJ, Luk VK, Brar NS. Perforation of aluminium armor plates with conical-nose projectiles. *Mech Mater* 1990; 10:97-105.
- [24] Tore Borvik, Arild H. Clausen, Odd Sture Hopperstad, Magnus Langseth. Perforation of AA5083-H116 aluminium plates with conical-nose steel projectiles – experimental study.

Anexo A.

Programa del modelo analítico y del modelo numérico en Matlab.

A.1. CÓDIGO DEL PROGRAMA.

```
clear all
B=1.133;
Emod=70e9;
d=0.02;
nu=0.3;
rho=2700;
e=0.02;
h=0.03;
mp=0.197;
sigmay=157e6;
vi=190;
A=2/3*(1+log(Emod/3/(1-nu)/sigmay));
dx=1e-3;
epsilon=(B*d^4*e*pi*rho)/(2*(d^2+4*h^2)*mp);
alfa=(A*d^2*e*pi*sigmay)/(2*mp*vi^2);
W=0;

%%Modelo analítico calculado%%

%%Orden cero del modelo analítico%%
for i=1:1/dx+1;
    x(i)=(i-1)*dx;
    WCERO(i)=1-((alfa)*(e^2)/3/(h^2))*(x(i)^3);
end;
for i=1/dx+1:fix((h/e)/dx)+1;
    x(i)=(i-1)*dx;
    WCERO(i)=1+(2*e*e*alfa/3/(h^2))-((alfa*e*e/h/h)*x(i));
end;
for i=fix((h/e)/dx)+1:fix(((h+e)/e)/(dx));
    x(i)=(i-1)*dx;
    WCERO(i)=1-(alfa*((e+h)^2)/(h^2))*(x(i))-
    (alfa*(e^2)/(3*h*h))*(x(i)^3)+(e*alfa*(e+h)/(h*h))*(x(i)^2)+alfa+(2*e*
    alfa*e/(3*h*h))+(h*alfa/(e^3));
end;

%%Orden uno del modelo analítico%%
for i=1:1/dx+1;
    x(i)=(i-1)*dx;
    WUNO(i)=epsilon*((e^2)/3/(h^2)*(x(i)^3))-
    alfa*(e^4)/18/(h^4)*(x(i)^6));
end;
for i=1/dx+1:fix((h/e)/dx)+1;
    x(i)=(i-1)*dx;
    WUNO(i)=epsilon*(-
    alfa*(e^4)/2/(h^4)*(x(i)^2)+((e*e/h/h)+((2*alfa*e*e*e*e)/3/(h^4)))*x(i)
    )-((6*e*e*h*h+2*e*e*e*alfa)/9/(h^4));
end;
for i=fix((h/e)/dx)+1:fix(((h+e)/e)/(dx));
    x(i)=(i-1)*dx;
    WUNO(i)=epsilon*(-
    (alfa*e*e*e*e/(18*h^4))*(x(i)^6)+(e*e*e*(e+h)*alfa/(3*h^4))*(x(i)^5)-
    (5*e*e*(e+h)*(e+h)*alfa/(6*(h^4)))*(x(i)^4)+(e*(11*e*e*e*alfa+27*e*e*h
    *alfa+10*h*h*h*alfa+3*e*h*h*(1+10*alfa))/(9*h^4))*(x(i)^3)-
    ((e+h)*(3*e*h*h*(2+5*alfa)+7*e*e*e*alfa+9*e*e*h*alfa+5*h*h*h*alfa)/(6*
    (h^4)))*(x(i)^2)+((e+h)*(e+h)*(2*e*e*e*alfa+h*h*h*alfa+3*e*h*h*(1+alfa)
    ))/(3*e*(h^4)))*(x(i))+((-
    2*h*h*h*e*(11*e*e*e*alfa+27*e*e*h*alfa+10*h*h*h*alfa+3*e*h*h*(1+10*alf
```

```
a)) + e * (-12 * e * e * e * h * h + 18 * e * e * e * h * h * h - 4 * (e^6) * alfa -  
12 * e * e * e * e * h * h * alfa + 36 * e * e * e * h * h * h * alfa + 36 * e * e * h * h * h * h * alfa + 33 * e * (h^5)  
* alfa + 25 * (h^6) * alfa -  
18 * e * h * h * h * (e + h) * (e + h) * (1 + alfa) + 9 * e * h * h * h * h * (e + h) * (2 + 5 * alfa) -  
6 * (h^5) * alfa * (e + h)) / (18 * e * e * e * h * h * h * h));  
end;  
  
%%%Modelo numérico obtenido con el método de Euler%%%  
wnum(1)=1;  
for i=1:1/dx+1;  
    xn(i)=(i-1)*dx;  
    wnum(i+1)=wnum(i)-dx*(-  
epsilon*e*e/h/h*wnum(i)*xn(i)*xn(i)+alfa*e*e/h/h*xn(i)*xn(i));  
end;  
for i=1/dx+1:fix((h/e)/dx)+1;  
    xn(i)=(i-1)*dx;  
    wnum(i+1)=wnum(i)+dx*(epsilon*e*e/h/h*wnum(i)-alfa*e*e/h/h);  
end;  
for i=fix((h/e)/dx)+1:fix(((h+e)/e)/(dx));  
    xn(i)=(i-1)*dx;  
  
wnum(i+1)=wnum(i)+dx*(epsilon*((e+h)^2)/h/h*wnum(i)+e*e/h/h*epsilon*wn  
um(i)*xn(i)*xn(i)...  
-2*e*(e+h)/h/h*epsilon*wnum(i)*xn(i)-alfa*((e+h)^2)/h/h-  
alfa*e*e/h/h*xn(i)*xn(i)...  
+2*e*alfa*(e+h)/h/h*xn(i));  
end;  
  
xn(i+1)=(i)*dx;  
  
%%%Modelo completo%%%  
WTOTAL=WCERO+WUNO;  
  
%%%Gráficas de los diferentes métodos%%%  
plot(x*e, (WTOTAL.^0.5)*vi, 'r')  
hold on  
plot(xn*e, (wnum.^0.5)*vi, 'g')  
plot(x*e, (WCERO.^0.5)*vi, 'b')  
hold off
```